

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND X, HEFT 1

MIT 30 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 10. JANUAR 1956)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1956



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5  
Tel. U 26 5 60, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdruckweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag.

Band X, Heft 1

## Inhaltsverzeichnis

### Originalarbeiten

	Seite
M. Z. E. Krzywoblocki, Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow .....	1
M. A. Dengler, Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. (Mit 7 Textabbildungen) .....	39
D. Rüdiger, Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit elliptischem Grundriß .....	66
H. Grömm, Abbildung von Oberflächen durch reflektierte Elektronen. (Mit 3 Textabbildungen) .....	75
W. Peschka, Der Axialverdichter als Schallquelle. (Mit 10 Textabbildungen) .....	80
H. Fieber und F. Selig, Temperaturfelder in endlichen Körpern bei bewegten Wärmequellen. (Mit 1 Textabbildung) .....	96
H. Grömm und H. Spurny, Ein analytisches Modell für elektronenoptische Ablenkfelder. (Mit 4 Textabbildungen) .....	104
W. Wunderlich, Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung. (Mit 5 Textabbildungen) .....	107

### Buchbesprechungen .....

Boerner, H., Darstellungen von Gruppen. Mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik (W. Knödel). — Dörrrie, H., Praktische Algebra (R. Inzinger). — Graf, E. G., Müller-Grafs Kurzes Lehr- und Handbuch der Technologie der Brennstoffe. 4. Auflage (F. Magyar). — Die Oberstufe des Tauernkraftwerkes Glockner-Kaprun. Festschrift. Herausgegeben von der Tauernkraftwerke-Aktiengesellschaft (F. Magyar). — Bisplinghoff, R. L., H. Ashley und R. L. Halfman, Aeroelasticity (R. Bruniak).



# Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow\*

## D. Review of Other Methods, Tables

By M. Z. E. Krzywoblocki, University of Illinois

**Summary.** In this fourth part of his work on Bergman's linear operator method, the author briefly outlines the other methods used in the fluid dynamics: expansion in powers of the Mach number, expansion in powers of a thickness parameter, variational methods, etc. A review of the tables and particular formulas, list of tables, a brief outline of some examples, etc., close this part.

### Part VII

#### Review of Other Methods

Below a brief review of some other methods in the theory of compressible fluid flow is given in order that the reader may have a clear picture of some possibilities at the present time in that field. The author particularly emphasizes the fact that not all available methods are included in the present brief review but only some of them for illustrative purposes. All shock-phenomena and -theories, the methods of characteristics, limiting lines, a thorough discussion of the conical field theory, unsteady flow, special two- and three-dimensional airfoil theories, etc., are excluded from this review.

#### 1. Methods of expansion in powers of the Mach number

Janzen<sup>1</sup> (1913) starting with the well-known solution for the incompressible fluid flow as the initial approximation obtained the first approximation to the compressible fluid flow. He employed the method of successive approximations in Mach number. The method may be briefly described. Through insertion of the initial, or first, approximation into the right-hand side of compressible fluid flow equation, written in the form  $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = F(M(x, y))$ , the first (or second) approximation is computed on the base of the previously given boundary conditions. The differential equation, cited above, is linear and therefore simpler than the rigorous non-linear equation. In principle the method may be continued in an analogous way to any desired further approximations, where the question of convergence from case to case must be studied. The amount of calculation is considerable and increases with each further approximation. Janzen and Rayleigh<sup>2</sup> (1916) have applied the method to the compressible flow about a circular cylinder. Rayleigh applied it also to the flow past a sphere. Both Janzen and Rayleigh calculated only first approximations in each case. It turns out that the iteration process converges only as long as the critical velocity is not reached anywhere; the method therefore provides only the

\* Part I—VI have been published in Vol. VI, VII, VIII (1955).

<sup>1</sup> O. Janzen: Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten. *Physik. Z.* **14**, 639—643 (1913).

<sup>2</sup> Lord Rayleigh: On the flow of compressible fluid past an obstacle. *Phil. Mag.* (6) **32**, 1—6 (1916), or *Papers*, 6, 402.



pure subsonic flow around a body. The failure of the method when applied to a flow with supersonic velocity has no physical, but only a purely formal mathematical base; since, of course, the equations of the iteration process throughout are of the elliptic type, they cannot lead to solution of the hyperbolic potential equations of supersonic flow.

Lamb<sup>3</sup> (1928) applying Janzen-Rayleigh method of successive approximations calculated the first approximation to the velocity potential of the circulatory flow past a circular cylinder.

Poggi<sup>4</sup> (1932, 1934) applying basically the method of expansion in a series replaced the compressible fluid flow by an incompressible fluid flow due to a suitable distribution of sources throughout the region of flow. He calculated the second approximation to the flow around a circular cylinder but did not take into account all the important and necessary items.

Pistolessi<sup>5</sup> (1935) calculated the second approximation to the flow around a circular cylinder but also in an incomplete form.

Prandtl<sup>6</sup> (Volta-Congress 1935) proposed a change in the Janzen-Rayleigh iteration process. The original Janzen-Rayleigh treatment starts with an incompressible flow as the initial approximation. According to Prandtl, the linearized flow should be used as a first approximation of an iteration method, whence with Mach numbers considerably different from zero. By this method there results from the very beginning a better approximation to the desired rigorous solution.

Hooker<sup>7</sup> (1936) employed the Janzen-Rayleigh method for the determination of the effects of compressibility upon the air flow past elliptic cylinders and a symmetrical Joukovski's section at Mach number 0.5. Only the case of the fluid streaming past the cylinders in the direction of their major axes was considered. The fineness ratio of the ellipse to which the method can be applied is limited. The method is an approximate one and is restricted to lower Mach numbers. The local velocity of sound cannot ever be exceeded at any point. In general the method may be applied to two-dimensional flow solutions around slender cylindrical bodies, the effect of compressibility being merely to distort slightly the streamlines from the positions they would have occupied if the fluid had been incompressible.

Imai<sup>8</sup> (1938) applying Janzen-Rayleigh method of successive approximations first found a solution of the flow of a compressible fluid past a circular cylinder correct to the second approximation. This same problem has been also rediscussed by Tamada and Saito<sup>9</sup> (1939) by means of Poggi's method and Imai's result has been confirmed.

Kaplan<sup>10</sup> (1938 and 1939) applied Poggi's method for the determination of the effects of compressibility upon the flow past symmetrical Joukovsky profiles and

<sup>3</sup> H. Lamb: On the flow of a compressible fluid past an obstacle. R. and M. No. 1156, British A. R. C. (1928).

<sup>4</sup> L. Poggi: Campo di velocita in una corrente piana di fluido compressibile. *L'Aerotecnica* **12**, 1579—1593 (1932). Caso dei profili ottenuti con rappresentazione conforme dal cerchio ed in particolare dei profili Joukovsky. *L'Aerotecnica* **14**, 532—549 (1934).

<sup>5</sup> E. Pistolessi: Atti dei convegni fondazione Alessandro Volta (Roma) **5**, 283—328 (1935).

<sup>6</sup> L. Prandtl: Atti del 5. Convegno Volta, Rome 169—197 (1935).

<sup>7</sup> S. G. Hooker: The two-dimensional flow of compressible fluids at subsonic speeds past elliptic cylinders. R. and M., British A. R. C. No. 1684, 100—115 (1936).

<sup>8</sup> I. Imai: On the flow of a compressible fluid past a circular cylinder. *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **20**, 636—645 (1938).

<sup>9</sup> K. Tamada and Y. Saito: Note on the flow of a compressible fluid past a circular cylinder. *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **21**, 403—409 (1939).

<sup>10</sup> C. Kaplan: Compressible flow about symmetrical Joukovski profiles. N. A. C. A., Tech. Rep. No. 621 (1938). Two-dimensional subsonic compressible flow past elliptic cylinders. N. A.



past circular and elliptic cylinders at zero angle of attack and with no circulation. Comparison with Hooker's treatment shows that for thick elliptic cylinders the two methods agree very well. The method of Poggi has the advantage in comparison with the original Janzen-Rayleigh method that it not only permits an unrestricted thickness ratio of the ellipse but also reduces the labor of computation. Kaplan's solution of the flow around a circular cylinder contains a few incorrect terms.

Pistolesi<sup>11</sup> (1939) gave the correct values of the second approximation to the flow around a circular cylinder in a full agreement with the results of Imai, and Tamada and Saito.

Tamada<sup>12</sup> (1939 and 1940) and Kaplan<sup>13</sup> (1940) attacked the problem of the flow of a compressible fluid past a sphere by means of the method of expansion in powers of the Mach number. Tamada applied Poggi's method and calculated the second approximation. In connection with this type of flow there are interesting experimental results obtained by Pasqualini<sup>14</sup> (1927 and 1931).

Lamla<sup>15</sup> (1940) attacked the problem of the flow past a circular cylinder by this method.

Imai and Aihara<sup>16</sup> (1940) applied an improved Janzen-Rayleigh method to the subsonic compressible fluid flow past an elliptic cylinder.

Tomotika and Tamada<sup>17</sup> (1940) applied  $M^2$ -expansion (Janzen-Rayleigh) to a flow around an elliptic cylinder. They derived a general method for any angle of attack.

Tomotika and Umemato<sup>18</sup> (1941) used Poggi's method to calculate the flow past a symmetrical Joukovsky airfoil by means of a transformation from a circle.

Imai<sup>19</sup> (1941) calculated the flow of a compressible fluid past a circular cylinder using Janzen-Rayleigh method exactly to  $M^6$ . Similarly in 1944<sup>20</sup> he applied it to an elliptic cylinder.

Eser<sup>21</sup> (1942) in his dissertation calculated the third approximation ( $M^6$ ) to the flow around a circular cylinder.

Kaplan<sup>22</sup> (1942) improved the Janzen-Rayleigh method and discussed the use of residue theory for treating the subsonic flow of a compressible fluid.

C. A., Tech. Rep. No. 624 (1938). A theoretical study of the moment on a body in compressible fluid. N. A. C. A., Rep. No. 671, 581—598 (1939).

<sup>11</sup> E. Pistolesi: *Aerotechnica* **19**, 1064—1068 (1939).

<sup>12</sup> K. Tamada: On the flow of a compressible fluid past a sphere. *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **21**, 403—409 (1939). *Ibid.*, 743. Further studies on the flow of a compressible fluid past a sphere. *Ibid.* **22**, 519—525 (1940).

<sup>13</sup> C. Kaplan: The flow of a compressible fluid past a sphere. N. A. C. A., T. N. No. 762 (1940).

<sup>14</sup> C. Pasqualini: *Atti 4<sup>o</sup> Congresso Internazionale di Navigazione Aerea (Roma)* **4** (1927). *Rivista Aeronautica* **7**, 443—457 (1931).

<sup>15</sup> E. Lamla: Die symmetrische Potentialströmung eines kompressiblen Gases um einen Kreisylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet. *Luftfahrtforschung* **17**, 329—331 (1940).

<sup>16</sup> I. Imai and T. Aihara: On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder. *Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ.* No. 194, **15** (1940).

<sup>17</sup> S. Tomotika and K. Tamada: Studies on the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder. *Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ.* No. 201, **15**, 481—551 (1940).

<sup>18</sup> S. Tomotika and H. Umemato: On the subsonic flow of a compressible fluid past a symmetrical Joukowski aerofoil. *Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ.* **16**, 35—125 (1941).

<sup>19</sup> I. Imai: On the flow of a compressible fluid past a circular cylinder, II. *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **23**, 180 (1941).

<sup>20</sup> I. Imai: Note on the velocity distribution round an elliptic cylinder at high speeds. *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **26**, 71 (1944).

<sup>21</sup> F. Eser: Dissertation, München (1942).

<sup>22</sup> C. Kaplan: On the use of residue theory for treating the subsonic flow of a compressible fluid. N. A. C. A., Rep. No. 728 (1942).



Heaslet<sup>23</sup> (1944) using Janzen-Rayleigh method obtained the potential function for flow, with circulation, of a compressible fluid about a circular cylinder in series form including terms of the order  $M^4$ .

Goldstein and Lighthill<sup>24</sup> (1944) applied Janzen-Rayleigh method for finding the first-order effect of compressibility on the potential flow past a solid body when the irrotational incompressible flow is known (by use of the complex variable).

Imai<sup>25</sup> (1947) applied the Janzen-Rayleigh method to the calculation of the flow past a flat plate exactly to  $M^8$ .

Wendt<sup>26</sup> (1948) treated this method by use of complex variables. Ehlers<sup>27</sup> (1949) discussed various applications of Janzen-Rayleigh method.

## 2. Method of expansion in powers of a thickness parameter (small perturbations)

Ackeret<sup>28</sup> (1925) linearized the equation of the velocity potential in the supersonic case (hyperbolic type) applying the small perturbation method and derived the equation for lift and drag.

Ackeret<sup>28</sup> (1928) applied the iteration process consisting in developing the velocity potential function or the stream-function in powers of a geometrical characteristic parameter of the body (like thickness or camber) to the flow past elongated bodies of small thickness. In that way he obtained an approximation that applies to the entire subsonic range of velocity. He applied also this same method to flow along a wave-shaped wall. The method of expansion in powers of the amplitude of the wave was used. Different names are attached to this method and its variations: Ackeret iteration process, small perturbations method or Prandtl-Busemann method<sup>29</sup> (1929). A brief discussion on the subject of two methods given above may be interesting. Janzen-Rayleigh development of the velocity potential or the stream function in a power series of the stream Mach number, and the Ackeret iteration method are complementary in nature. The complementary nature of these two methods lies in the fact that the Janzen-Rayleigh procedure yields accurate results in the case of thick bodies, for which the critical stream Mach numbers are low; whereas the Ackeret iteration process yields accurate results in the case of slender bodies, for which the critical Mach numbers are in the neighborhood of unity.

Prandtl-Glauert formula<sup>30</sup> (1928-30) is based on the small perturbations method. With the assumption that the disturbances introduced by a solid body to the parallel

<sup>23</sup> M. A. Heaslet: Compressible potential flow with circulation about a circular cylinder. N. A. C. A., A. R. R. No. 4 A 08 (1944), or N. A. C. A., Rep. No. 780 (1944).

<sup>24</sup> S. Goldstein and M. J. Lighthill: Two-dimensional compressible flow past a solid body in unlimited fluid or symmetrically placed in a channel. Phil. Mag. **35**, 549-568 (1944).

<sup>25</sup> I. Imai: On the hodograph method in the theory of compressible flow (in Japanese). Ooyôsûgaku-Rikigaku (The Applied Mathematics and Mechanics) **1**, 147 (1947).

<sup>26</sup> H. Wendt: The Janzen-Rayleigh approximation for the calculation of subsonic flows. Heidelberg Akad. Wiss., math.-nat. Kl., Nr. 7 (1948).

<sup>27</sup> F. B. Ehlers: Methods of linearization in compressible flow. Part. I. Janzen-Rayleigh Method. Air Material Command Technical Report No. F-TR-1180A-ND (1948), Dayton, Ohio.

<sup>28</sup> J. Ackeret: Luftkräfte auf Flügel, die mit größerer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden. ZFM. **16**, 72-74 (1925). Über Luftkräfte bei sehr großen Geschwindigkeiten, insbesondere bei ebenen Strömungen. Helv. Physica Acta **1**, 301-322 (1928).

<sup>29</sup> L. Prandtl und A. Busemann: Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeiten. Stodola-Festschrift, Zürich (1929).

<sup>30</sup> L. Prandtl: Remarks on paper by A. Busemann entitled, „Profilmessungen bei Geschwindigkeiten nahe der Schallgeschwindigkeit (im Hinblick auf Luftschrauben)“. Jb. W. G. L. **95-99** (1928). Über Strömungen, deren Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind. J. Aeron. Res. Inst. Univ. Tokyo No. 65, 14 (1930). — H. Glauert: The effect



flow are small, the velocity potential equation can be linearized and solved in certain cases by means of simple methods. An example of this procedure is just the well-known Prandtl-Glauert formula. From the nature of this formula it is obvious that it is applicable to flows over bodies of small thickness ratio. Basically, the Prandtl-Glauert formula may be considered as the first term in an expansion in powers of a thickness parameter.

Taylor<sup>31</sup> (1932) discussed the application of Ackeret's supersonic theory to certain problems in aeronautics.

Busemann and Walchner<sup>32</sup> (1933) and Busemann<sup>33</sup> (1935) extended the Ackeret's procedure by including the second order approximation when it was found that certain of the first-order results were not in complete accord with experiments.

Riabouchinsky<sup>34</sup> (1938) applied the method of small perturbations to three-dimensional problems.

Göthert<sup>35</sup> (1940) applied also the method of small perturbations to two- and three-dimensional problems.

Görtler<sup>36</sup> (1940) applied the method of expansion in powers of a thickness parameter to the flow past profiles of a small camber in the subsonic range.

Hantsche and Wendt<sup>37</sup> (1942) applying this method used the results of the second approximation. They discussed also the regions where the transformation is not allowed (stagnation points).

Goldstein and Young<sup>38</sup> (1943) applied the development in powers of a thickness parameter to wind-tunnel interference. They also listed more important results of the linearized theory correctly except for some points concerning axisymmetrical flow which Sears has cleared up (1946 and 1947).

Hantsche<sup>39</sup> (1943) treated the case of an elliptic cylinder at zero incidence in a uniform stream according to Ackeret's process.

Kaplan<sup>40</sup> (1943) attacked the problem of the flow of a compressible fluid past of compressibility on the lift of an airfoil. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **118**, 113—119 (1928); also, R. and M., British A. R. C. No. 1135 (1928).

<sup>31</sup> G. I. Taylor: The flow of air at high speeds past curved surfaces. *British A. R. C., R. and M. No. 1381* (1930).

<sup>32</sup> A. Busemann und O. Walchner: Profileigenschaften bei Überschallgeschwindigkeit. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* **4**, 87—92 (1933). Also: R. T. P. Translation No. 1786, British Ministry of Aircraft Production.

<sup>33</sup> A. Busemann: Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. *Luftfahrtforschung* **12**, 210—220 (1935).

<sup>34</sup> D. Riabouchinsky: Équations approchées des mouvements troisdimensionnels d'un fluide parfait compressible. *C. r. acad. sci., Paris* **206**, 472—475 (1938).

<sup>35</sup> B. Göthert: Ebene und räumliche Strömung bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten. *Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung, Bericht* **127**, 97—101 (1940). Also: Plane and three-dimensional flow at high subsonic speeds. *N. A. C. A., T. M. No. 1105* (1946).

<sup>36</sup> H. Görtler: Gasströmungen mit Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten. *Z. angew. Math. Mechan.* **20**, 254—262 (1940).

<sup>37</sup> W. Hantsche und H. Wendt: Der Kompressibilitätseinfluß für dünne, wenig gekrümmte Profile bei Unterschallgeschwindigkeiten. *Z. angew. Math. Mechan.* **22**, 72—86 (1942). Also: R. T. P. Translation No. 2198, British Ministry of Aircraft Production; *Roy. Aero. Soc. J.* **1943**, 406—407.

<sup>38</sup> S. Goldstein and A. D. Young: The linear perturbation theory of compressible flow with application to wind tunnel interference. *British A. R. C. 6865, Aero. 2262, FM. 601* (1943), or *British A. R. C., R. and M. 1909* (1943).

<sup>39</sup> M. Hantsche: Die Prandtl-Glauertsche Näherung als Grundlage für ein Iterationsverfahren zur Berechnung kompressibler Unterschallströmungen. *Z. f. angew. Math. Mechan.*, **23**, 185—199 (1943).

<sup>40</sup> C. Kaplan: The flow of a compressible fluid past a curved surface. *N. A. C. A., ARR. No. 3K02 (L 320)* (1943) or *N. A. C. A., Rep. No. 768* (1943).



a curved surface by means of an iteration process based on that of Ackeret. The first approximation which leads to the Prandtl-Glauert rule, is based on the assumption that the flow differs but little from a pure translation. The iteration process then consists in improving this first approximation in order that it will apply to a flow differing from pure translatory motion to a greater degree. This same method was applied to flow past a circular cylinder (1944)<sup>41</sup>.

Imai<sup>20, 42</sup> (1944) developed the so-called thin-wing-expansion method which is essentially an extension of the linear theory of Prandtl-Glauert and applied it to a flow around an elliptic cylinder.

Lock<sup>43</sup> (1944) applied Busemann's second order approximation to evaluate the forces on supersonic aerofoils.

Ward<sup>44</sup> (1945) using the linearized equation attacked the problem of a compressible flow in a tube of slightly varying cross-section.

Tsien and Lees<sup>45</sup> (1945) presented the application of the Prandtl-Glauert method to the three-dimensional flow and to the calculation of wall interference in wind-tunnel testing at high speeds. Their approach also involves the derivation of the Biot-Savart law for the compressible flow by the Prandtl-Glauert formula and the induced velocity field of the helical vortex, which represents approximately the trailing vortex shed from a propeller blade.

Lees<sup>46</sup> (1946), Laitone<sup>47</sup> (1946, 1947), Sears<sup>48</sup> (1946, 1947), Young<sup>49</sup> (1949) obtained in various ways the correct compressibility correction factors in applying the Prandtl-Glauert rule to three-dimensional flow and wind-tunnel wall effects.

Kaplan<sup>50</sup> (1946 and 1947) applied an extended form of the Ackeret iteration method to calculate the compressible flow at high subsonic velocities past an elliptic cylinder.

Tsien<sup>51</sup> (1946) derived similarity rules for hypersonic flows.

Kármán<sup>52</sup> (1947) derived the similarity laws of transonic flows.

<sup>41</sup> C. Kaplan: The flow of a compressible fluid past a circular arc profile. N. A. C. A., ARR. No. L4G15 (L 216) (1944), or N. A. C. A., Rep. No. 794 (1944).

<sup>42</sup> I. Imai: Two-dimensional aerofoil theory for compressible fluids (in Japanese). Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ. No. 294 (1944).

<sup>43</sup> C. N. H. Lock: Examples of the application of Busemann's formula to evaluate the aerodynamic force coefficients on supersonic aerofoils. R. and M. No. 2101, British A. R. C. (1944).

<sup>44</sup> G. N. Ward: A note on compressible flow in a tube of slightly varying cross-section. Aeron. Res. Council, R. and M. No. 2183 (1945).

<sup>45</sup> H. S. Tsien and L. Lees: The Glauert-Prandtl approximation for subsonic flows of a compressible fluid. J. Aeron. Sci. **12**, 173—187 (1945).

<sup>46</sup> L. Lees: A discussion of the application of the Prandtl-Glauert method to subsonic compressible flow over a slender body of revolution. N. A. C. A., T. N. No. 1127 (1946).

<sup>47</sup> E. V. Laitone: The subsonic and supersonic flow fields of slender bodies. Sixth International Congress for Applied Mechanics (1946). (Paris.) The subsonic and supersonic two-dimensional flow fields about slender bodies. Cornell Aeron. Lab. Publication No. 6 (1946). The subsonic axial flow about a body of revolution. Quart. Appl. Math. **5**, 227—331 (1947).

<sup>48</sup> W. R. Sears: On compressible flow about bodies of revolution. Quart. Appl. Math. **4**, 191—193 (1946). A second note on compressible flow about bodies of revolution. Quart. Appl. Math. **5**, 89—91 (1947).

<sup>49</sup> A. D. Young: On the compressibility correction factor for axially symmetric bodies. Readers' Forum, J. Aeron. Sci. **16**, 703 (1949).

<sup>50</sup> C. Kaplan: Effect of compressibility at high subsonic velocities on the lifting force acting on an elliptic cylinder. N. A. C. A., T. N. No. 1118 (1946), or N. A. C. A., Rep. No. 834 (1946). Effect of compressibility at high subsonic velocities on the moment acting on an elliptic cylinder. N. A. C. A., T. N. No. 1218 (1947).

<sup>51</sup> H. S. Tsien: Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Physics **25**, No. 3, 247—251 (1946).

<sup>52</sup> Th. von Kármán: Supersonic aerodynamics—principles and applications. J. Aeron. Sci. **14**, 182—190 (1947).



Kaplan<sup>53</sup> (1948) used Tsien's method (to derive similarity rules for hypersonic flows) to derive von Kármán's similarity rules for transonic flows. A slight generalization is introduced by the inclusion of  $k$ , the ratio of specific heats, as a parameter. It is further shown that the obtained formula can also be obtained by means of the Prandtl-Glauert small-perturbation method.

Ward<sup>54</sup> (1948) by using the Heaviside operational method applied to the linear perturbation theory calculated the supersonic external and internal flow past a quasi-cylindrical tube.

Ward<sup>55</sup> (1949) solved the linearized potential problem of supersonic flow for nearly plane wings of arbitrary shape of planform and section.

Carrière<sup>56</sup> (1949) considered a motion slightly varied from a given potential supersonic flow.

Ehlers<sup>57</sup> (1949) discussed the general application of the Prandtl-Glauert type of linearization in subsonic and supersonic flows.

Ward<sup>58</sup> (1950) discussed the bases and scope of the linearized theory of compressible fluid flow with special reference to steady supersonic flow.

### 3. Variational methods

Bateman<sup>59</sup> (1929) was probably the first to apply the variational principle to certain problems in fluid dynamics.

Braun<sup>60</sup> (1932) investigated more deeply those possibilities.

Pinl<sup>61</sup> (1941) and Behrbohm and Pinl<sup>62</sup> (1941) discussed some phases of this problem and pointed out a relationship between the hydrodynamical problems and the theory of minimal surfaces.

Truesdell<sup>63</sup> (1946) proved that Behrbohm and Pinl's result is in fact not a new linearization of a non-linear equation but rather a transformation of an old one obtained by means of the Legendre transformation.

<sup>53</sup> C. Kaplan: On similarity rules for transonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1527 (1948).

<sup>54</sup> G. N. Ward: The approximate external and internal flow past a quasi-cylindrical tube moving at supersonic speeds. Quart. Mechan. a. Appl. Math. **1**, 225—245 (1948).

<sup>55</sup> G. N. Ward: Supersonic flow past thin wings. I. General Theory. Quart. J. Mechan. a. Appl. Math. **2**, 136—152 (1949). Supersonic flow past thin wings. II. Flow-reversal theorems. Quart. J. Mechan. a. Appl. Math. **2**, 374—384 (1949).

<sup>56</sup> P. Carrière: Slightly varied supersonic flows. C. r. acad. sci., Paris **228**, 1632—1634 (1949).

<sup>57</sup> F. B. Ehlers: Methods of linearization in compressible flow. Part III. Prandtl-Glauert method. Headqtrs. Air Mater. Comm. Dayton Transl. Tech. Rep. No. F-TR-11800-ND (1949).

<sup>58</sup> G. N. Ward: The bases and scope of the linearized theory of compressible fluid flow with special reference to steady supersonic flow. Symposium on theoretical compressible flow (June 1949), Naval Ordnance Laboratory, White Oak, NOLR 1132 (Issued July 1950), 35—41.

<sup>59</sup> H. Bateman: Notes on a differential equation which occurs in the two-dimensional motion of a compressible fluid and the associated variational problem. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **16** (1930). The irrotational motion of a compressible fluid. Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. **16** (1930).

<sup>60</sup> G. Braun: Die ebene kompressible Potentialströmung als Variations- und Eigenwertproblem. Dissertation Göttingen (1932). Also: Ann. Physik (5) **15**, 645—676 (1932).

<sup>61</sup> M. Pinl: Zur geometrischen Deutung und Transformation der Grundgleichung der ebenen kompressiblen Potentialströmung. Z. angew. Math. Mechan. **21**, 80—85 (1941).

<sup>62</sup> H. Behrbohm und M. Pinl: Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen I. Neue Linearisierung der Grundgleichung der ebenen adiabatisch kompressiblen Potentialströmung. Z. angew. Math. Mechan. **21**, 193—203 (1941). Also R. T. P. Translation No. 1625.

<sup>63</sup> C. Truesdell: On Behrbohm and Pinl's linearization of the equation of two-dimensional steady polytropic flow of a compressible fluid. Proc. Nat. Acad. Sci., USA **32**, 289—293 (1946).



Wang<sup>64</sup> (1948), Wang and Rao<sup>65</sup> (1950), Wang and de los Santos<sup>66</sup> (1949) and de los Santos<sup>67</sup> (1949) applied the variational method (following the Rayleigh-Ritz procedure) to several problems like the calculation of two-dimensional subsonic compressible flows past arbitrary bodies, past bodies of revolution, transonic flows, etc.

Manwell<sup>68</sup> (1949) discussed a method of variation as applied to both in- and compressible fluid flow in the subsonic region.

Wang and Chou<sup>69</sup> (1950) discussed the application of Biezeno-Koch method to compressible fluid flow problems. As Courant pointed out this is essentially a special case of the variational method.

#### 4. Hodograph method

Molenbroeck<sup>70</sup> (1890) linearized the equations of motion by means of transformation, in which potential and stream functions themselves are used as functions of the velocity coordinates.

Chaplygin<sup>71</sup> (1904) was the first to construct a set of particular solutions of the linearized equation in the hodograph plane in the subsonic range. In this method the stream function is represented by an infinite series of particular solutions, and such a series converges only within a part of the domain in which the flow is defined. A hodograph of a flow around a profile is (in general) a multiply covered domain, the branch-points of which are not necessarily located either at the origin or at infinity. On the other hand, the Chaplygin solutions yield flows which in the hodograph plane either are single-valued or multi-valued with a branch-point as the origin or at infinity. This comes out from the nature of the hypergeometric series which represents solutions. In order to represent such flow patterns, several series developments, each of which represents the stream function  $\psi$  under consideration in a certain part of the domain in which  $\psi$  is defined, are needed. Another suggestion of Chaplygin was to use the condition that the quantity  $s^2 = (1 - M^2) \rho^{-2}$  (see section I. 2) is constant. Under this assumption the function  $f(\lambda)$  (1.2.5) vanishes identically since  $s' = 0$ . Equation (1.2.4) reduces to a Laplacien which has a standard solution. One may easily notice that this great simplification of the equation in the hodograph plane results in  $k = -1$ . This is obvious from (1.3.11).

Meyer<sup>72</sup> (1908) presented the well-known expansion around the corner (called Prandtl-Meyer expansion).

<sup>64</sup> C. T. Wang: Variational method in the theory of compressible fluid. *J. Aeron. Sci.* **15**, 675—685 (1948).

<sup>65</sup> C. T. Wang and G. V. R. Rao: A study of the nonlinear characteristics of compressible flow equations by means of variational methods. *J. Aeron. Sci.* **17**, 343—348 (1950).

<sup>66</sup> C. T. Wang and S. de los Santos: Approximate solutions of compressible flows past bodies of revolution by variational method. (To be published.)

<sup>67</sup> S. de los Santos: Subsonic compressible flow past bodies of revolution by the variational method. Thesis (Eng. Sc. D.), New York Univ. (1949).

<sup>68</sup> A. R. Manwell: A method of variation for flow problems. I. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **20**, 166—189 (1949).

<sup>69</sup> C. T. Wang and P. C. Chou: Application of Biezeno-Koch method to compressible fluid flow problems. *J. Aeron. Sci., Readers' Forum* **17**, No. 9, 599—600 (1950).

<sup>70</sup> P. Molenbroek: Über einige Bewegungen eines Gases mit Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. *Arch. Math. Physik* (2) **9**, 157—195 (1890).

<sup>71</sup> S. A. Chaplygin: On gas jets. *Scientific Memoirs, Moscow University, Phys.-Math. Section* **21**, 1—127 (1904), or *N. A. C. A., T. N. No. 1063* (1944).

<sup>72</sup> Th. Meyer: Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. *Dissertation Göttingen* (1908), or *Mitt. Forsch.-Arb. Ing.-Wes.* **62** (1908).



Demtchenko<sup>73</sup> (1932) and Busemann<sup>74</sup> (1937) clarified the meaning of the specific value  $k = -1$ , proposed by Chaplygin. They found that this really means that the pressure is a linear function of  $1/\rho$ , i. e.,  $p = \sigma \rho^{-1}$ , where  $\sigma$  is a constant. Thus the curve  $p = p(1/\rho)$  is approximated in Chaplygin's approach by a tangent. However, both Demtchenko and Busemann limited themselves to the use of the tangent at the state of the gas corresponding to the stagnation point (conditions at rest), i. e.,  $M = 0$ ,  $s^2 = 1/\rho_0^2$ , where  $\rho_0$  corresponds to the conditions at rest. As a result their approach can only be applied to a flow with velocities up to about 0.4 to 0.5, the velocity of sound. Using this method Demtchenko and Busemann attacked some problems in the subsonic range.

Kármán<sup>75</sup> (1941) and Tsien<sup>76</sup> (1939) improved the approach, described above, in order to enable one to apply the hodograph method to larger velocities. They suggested that the theory can be generalized by using the tangent at the state of the gas corresponding to undisturbed parallel flow. Thus the range of usefulness of the theory can be greatly extended and we can obtain a better agreement with tests at speeds above 0.4 velocity of sound.

Using this assumption, Tsien<sup>76</sup> (1939) proposed his method of solving equation of flow in the subsonic range by the use of hodograph transformation. In the final step of his method an arbitrary analytic function must be chosen to which the function  $g(\bar{Z})$  in (1.9.2) may be considered to be in a certain analogy. Using this procedure, it is not possible to predict whether the chosen function will give the desired shape of the solid boundary and flow pattern. In other words, this procedure, in common with all hodograph methods, still suffers the difficulty of boundary conditions. However, the resulting shape of the body can be ascertained approximately by starting with the function so chosen as to give the flow of an incompressible fluid over the desired body shape in a plane which may be considered to be a transformation of the physical plane. Using this method Tsien solved as an example the flow around an elliptic cylinder at zero angle of attack. Let us compare Tsien's method with some others. The difference between the various theories lies in the assumptions which are made to simplify the calculations. As explained above, Prandtl and Glauert treated the flow over a body of small thickness ratio. Kaplan and Hooker (Hooker's results are very close to those of Kaplan) assumed that the Mach number of the undisturbed flow is small, so that terms containing the third and higher powers of the Mach number can be neglected. Tsien's theory is essentially an improvement of the Prandtl-Glauert theory, so that the effect of large disturbances to the parallel flow is approximately taken into account. Therefore, for flow over thin sections at high Mach numbers, the result of Tsien's theory should agree well with the Prandtl-Glauert theory, especially at points not too close to the stagnation point. The results of Kaplan and Hooker should show smaller effect of the compressibility due to their second order approximation. For flow over thick sections at lower Mach numbers, the situation is reversed. In this case results of Tsien's theory should give better agreement with the results obtained by Kaplan and Hooker than with those obtained from the Prandtl-Glauert theory. The above reasoning is substantiated by diagrams

<sup>73</sup> B. Demtchenko: Sur les mouvements lents des fluides compressibles. C. r. acad. sci., Paris **194**, 1218—1220 (1932).

<sup>74</sup> A. Busemann: Hodographmethode der Gasdynamik. Z. angew. Math. Mechan. **17**, 73—79 (1937).

<sup>75</sup> Th. von Kármán: Compressibility effects in aerodynamics. J. Aeron. Sci. **8**, 337—356 (1941).

<sup>76</sup> H. S. Tsien: J. Aeron. Sci. Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. J. Aero. Sci. **6**, 399—407 (1939).



presented in Tsien's paper. The amount of labor involved in Tsien's method is probably much less than in the successive approximations devised by Janzen-Rayleigh, Poggi and Walther, especially at higher Mach numbers. The main difficulty of this method lies in its application to flow involving circulation. The problem is more difficult and requires further study.

Ringleb<sup>77</sup> (1940) using hodograph transformation calculated the flow around a sharp edge.

Tamada<sup>12</sup> (1940) based his calculations on Kármán-Tsien idea, i. e., approximated the  $(p, \varrho^{-1})$ -curve by a tangent at the point  $p_1, \varrho_1^{-1}$ , and applied the Tsien's method. Starting from the well-known solution for the incompressible fluid flow past a circular cylinder, the compressible fluid flow past the corresponding body shape in the physical plane was calculated. The obtained shape is nearly circular. The deformed profile was calculated for  $M = 0.4$ . It was thus found that the deformed profile is very similar to the original circular profile, but the radius of the former is somewhat smaller than that of the latter. The calculated results are compared with those calculated by using the second approximation terms and also with the experimental results of Taylor, showing a fair agreement at those low Mach numbers.

Christianovitch<sup>78</sup> (1941) derived a method for solution a Cauchy problem for a partial differential equation of mixed elliptico-hyperbolic type.

Bergman<sup>79</sup> (1942) proposed an extension of Kármán-Tsien method. Kármán-Tsien method is inconvenient in that it can be applied if  $s^2 = (1 - M^2) \varrho^{-2}$  is assumed to be constant, i. e., under the hypothesis of a linear pressure volume relation. However the operator introduced in the present work enables us to get rid of this restriction. The relation between the pressure and the volume can always be approximated by  $p = P(\varrho^{-1})$ , where  $P$  is a polynomial in  $\varrho^{-1}$ . For the sake of simplicity we take

$$p = (c_0 + b_0 \varepsilon) - (c_1 + b_1 \varepsilon) \varrho^{-1} + \varepsilon \varrho^{-3}. \quad (7.4.1)$$

For example, the curve of the form (7.4.1) which possesses the common tangent and the same curvature as the isentropic curve at the point  $(p_1, 1/\varrho_1)$  is given by the formula

$$p = \frac{1}{3} (k + 1) (k + 3) p_1 - \frac{1}{2} k (k + 3) p_1 \varrho_1 \varrho^{-1} + \frac{1}{6} k (k + 1) p_1 \varrho_1^3 \varrho^{-3}. \quad (7.4.2)$$

Equating the formulas (7.4.1) and (7.4.2) results in obtaining the proper value of the quantity  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , say. Consider equation

$$\psi_{HH} + l(H, \varepsilon) \psi_{\theta\theta} = 0, \quad (4.5.2)$$

in which it is assumed that  $l$  depends also upon the parameter  $\varepsilon$ . As explained above, a solution of this equation is given by the imaginary or the real part of (4.5.16). Consider now all the functions as depending upon  $\varepsilon$  also. Thus the function  $E_1$  (4.5.17) now is

$$E_1(Z', \bar{Z}', t, \varepsilon) = R(Z', \bar{Z}', \varepsilon) E_1^*(Z', \bar{Z}', t, \varepsilon). \quad (7.4.3)$$

For sufficiently small  $Z', \bar{Z}', \varepsilon$  and  $|t| \leq 1$ ,  $E_1$  is an analytic function of  $Z', \bar{Z}', \varepsilon, t$ . We can therefore develop  $E_1$  in a series

$$E_1 = E^{(0)}(Z', \bar{Z}', t) + \varepsilon E^{(1)}(Z', \bar{Z}', t) + \dots \quad (7.4.4)$$

<sup>77</sup> F. Ringleb: Über die Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß. Dtsch. Math. 5, 377—384 (1940).

<sup>78</sup> Christianovitch: On supersonic gas flows. CAHI Rep. No. 543 (1941) (in Russian).

<sup>79</sup> S. Bergman: The hodograph method in the theory of compressible fluids. Supplement to "Fluid Dynamics" by R. v. Mises and K. O. Friedrichs. Brown University. 1941/42.



Since  $\varepsilon$  will vary only in a small range  $[0, \varepsilon^{(0)}]$ , say, we neglect the coefficients of order higher than 1, and write

$$\psi(Z', \bar{Z}', \varepsilon) = \psi_0(Z', \bar{Z}') + \varepsilon \psi_1(Z', \bar{Z}') + \dots, \quad (7.4.5)$$

where

$$\psi_0(Z', \bar{Z}') = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-1}^{+1} E^{(0)}(Z', \bar{Z}', t) f \left[ \frac{1}{2} Z' (1 - t^2) \right] (1 - t^2)^{-1/2} dt \right\}, \quad (7.4.6a)$$

$$\psi_1(Z', \bar{Z}') = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-1}^{+1} E^{(1)}(Z', \bar{Z}', t) f \left[ \frac{1}{2} Z' (1 - t^2) \right] (1 - t^2)^{-1/2} dt \right\}. \quad (7.4.6b)$$

Suppose now that (4.5.2) is the equation of the stream function  $\psi(Z', \bar{Z}', \varepsilon)$  of motion of a gas with the pressure-volume relation given by (7.4.1). For  $\varepsilon = 0$ , which corresponds to  $p = -c_1 \varrho^{-1}$  or  $k = -1$ , the coefficient  $l$  in (4.5.2) becomes constant. If a domain  $B$  is given in the physical plane, we can determine (using the operator's method) a domain  $B^*$  and the stream function  $\psi(Z', \bar{Z}')$  of motion of a gas with the pressure-volume relation  $p = -c_1 \varrho^{-1}$ . Since for  $\varepsilon = 0$ ,  $\psi = \psi_0$  (7.4.5), we have the first approximation to  $\psi$ . Next we find the function  $f$  associate of  $\psi$  (for details see<sup>79</sup>), which introduced into (7.4.6b) gives the value of  $\psi_1$  and next the value of  $\psi$  (7.4.5). Inserting the proper numerical value  $\varepsilon_0$  for  $\varepsilon$  we obtain the stream function  $\psi(Z', \bar{Z}', \varepsilon_0)$  which corresponds to the pressure-volume relation (7.4.1) or (7.4.2). The function  $\psi(Z', \bar{Z}', \varepsilon_0)$  will no longer assume a constant value on the boundary line  $b^*$  of  $B^*$ . However, since  $\varepsilon_0$  is small, there will exist in most cases lines  $\psi(Z', \bar{Z}', \varepsilon_0) = \text{constant}$ , which only slightly differ from  $b^*$ . Next we determine the corresponding domain  $B^{**}$  in the physical plane. In many instances it will only slightly differ from  $B$ . The method can be improved and for details in that respect see<sup>79</sup>.

Temple and Yarwood<sup>80</sup> (1942) attempting to set up a correspondence between incompressible and compressible flows of the nature of correction factors, derived a velocity correction formula similar to those of Kármán-Tsien or Garrick-Kaplan.

Gelbart<sup>81</sup> (1943), Bers and Gelbart<sup>82</sup> (1943, 1944), and Bers<sup>83</sup> (1945) applied the theory of sigma-monogenic functions to study a class of complex functions the role of which in gas-dynamics is comparable to that of analytic functions in the theory of incompressible flows. Their method in the years 1943-45 was restricted to subsonic flows. The method permits the transformation of a two-dimensional incompressible flow around a closed profile into a subsonic compressible flow around another closed profile. The profile distortion is small for small values of the stream Mach number. In the case of the actual pressure-density relation an approximate method of solving the problem is indicated. If Kármán-Tsien linearized equation is assumed the transformation is carried out completely and in a closed form not only for flow without

<sup>80</sup> G. Temple and J. Yarwood: The approximate solution of the hodograph equations for compressible flow. Rep. No. 8. M. E. 3201, British R. A. E. (June 1942). Compressible flow in a convergent-divergent nozzle. R. and M. No. 2077, British A. R. C. (1942).

<sup>81</sup> A. Gelbart: On a function-theory method for obtaining potential-flow patterns of a compressible fluid. N. A. C. A., A. R. R. No. 3027 (1943).

<sup>82</sup> L. Bers and A. Gelbart: On a class of differential equations in mechanics of continua. Quart. Appl. Math. 1, 168-188 (1943). On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 56, No. 1, 67-93 (1944).

<sup>83</sup> L. Bers: On a method of constructing two-dimensional subsonic compressible flows around closed profiles. N. A. C. A., T. N. No. 969 (1945). On the circulatory subsonic flow of a compressible fluid past a circular cylinder. N. A. C. A., T. N. No. 970 (1945).



circulation but also for flows with circulation. Using the linearized pressure-volume relation Bers computed the circulatory subsonic flow around an infinite circular cylinder.

Tsien and Fejer<sup>84</sup> (1944) examined the general applicability of the Kármán-Tsien formula from purely geometric considerations.

Garrick and Kaplan<sup>85</sup> (1944) developed the elementary basic solutions of the equations of motion of a compressible fluid in the hodograph plane in order to provide a basis for comparison in the form of velocity correction formulas, of corresponding compressible and incompressible flows. The known approximate results of Chaplygin, Kármán and Tsien, Temple and Yarwood, and Prandtl and Glauert are unified by means of a simple analysis.

Garrick and Kaplan<sup>86</sup> (1944) utilized the differential equation of Chaplygin's jet problem to give a systematic development of particular solutions of the hodograph flow equations, which extends the treatment of Chaplygin into the supersonic range and completes the set of particular solutions. The graphical flow patterns associated with certain particular solutions (of index  $k = \pm 1/2$ ,  $\pm 3/2$ , and  $\pm 2$ ) of the Chaplygin's equation are contained in the paper by Kraft and Dibble<sup>87</sup> (1944).

Frankl<sup>88</sup> (1944) derived a method for solution of a Cauchy problem for a partial differential equation of mixed elliptico-hyperbolic type. He showed that the continuation of the subsonic flow into the supersonic region is not uniquely determined.

Coburn<sup>89</sup> (1945) discussed the applicability of the Kármán-Tsien idea in the supersonic range. He also had shown that when the Kármán-Tsien relation can be used, the characteristics form a Tschebyscheff net.

Poritsky<sup>90</sup> (1946 and 1948) extended the Kármán-Tsien method by approximating the equation of state by means of not one but several straight-line segments in the  $(p, 1/\rho)$ -plane. This was applied by him to the flow from a point-source.

Maccoll<sup>91</sup> (1946) presented some investigations on compressible flow at sonic speeds.

Bers<sup>92</sup> (1946), Lin<sup>93</sup> (1946), Gelbart<sup>94</sup> (1947), Bartnoff and Gelbart<sup>95</sup> (1947) followed the idea of applying the simplified pressure-density relation so that the approximation theories can be developed which make use of the Cauchy-Riemann equations.

<sup>84</sup> H. S. Tsien and A. Fejer: A method for predicting the transonic flow over airfoils and similar bodies from data obtained at small Mach numbers. Army Air Forces (Dec. 1944).

<sup>85</sup> I. E. Garrick and C. Kaplan: On the flow of a compressible fluid by the hodograph method. I. Unification and extension of present day results. N. A. C. A., A. C. R. L 4 C 24 (1944), or N. A. C. A. Rep. No. 789 (1944).

<sup>86</sup> I. E. Garrick and C. Kaplan: On the flow of a compressible fluid by the hodograph method. II. Fundamental set of particular flow solutions of the Chaplygin differential equation. N. A. C. A., A. R. R. No. L 4 I 29, War Time Rep. No. L 147 (1944), or N. A. C. A., Rep. No. 790 (1944).

<sup>87</sup> H. Kraft and C. G. Dibble: Some two-dimensional adiabatic compressible flow patterns. J. Aeron. Sci. 11, 283—298 (1944).

<sup>88</sup> F. I. Frankl: On the Cauchy problem for equations of mixed elliptico-hyperbolic type with initial data on the parabolic line. Bull. Acad. Sci. URSS 8, 195—245 (1944) (in Russian).

<sup>89</sup> N. Coburn: The Kármán-Tsien pressure-volume relation in the two-dimensional supersonic flow of compressible fluids. Quart. Appl. Math. 3, 106—116 (1945).

<sup>90</sup> H. Poritsky: An approximate method of integrating the equations of compressible fluid flow in the hodograph plane. Sixth International Congress of Applied Mechanics, Paris (1946). Polygonal approximation method in the hodograph plane. J. Appl. Mechan., Trans. Amer. Soc. Mechan. Eng. 16, 123—133 (1949).

<sup>91</sup> J. W. Maccoll: Investigations of compressible flow at sonic speeds. Sixth International Congress for Applied Mechanics (1946) (Paris).

<sup>92</sup> L. Bers: Velocity distribution on wing sections of arbitrary shape in compressible potential flow. I. Symmetric flows obeying the simplified density-speed relation. N. A. C. A., T. N. No. 1006 (1946).



Tsien's and Kuo's<sup>96</sup> (1946) approach consists of several parts. In the first part the general properties of hypergeometric functions of large order are investigated in preparation for the proof of the convergence given in the second part. The general solution constructed by the Chaplygin's method is really an existence theorem. The extremely slow convergence of the series makes numerical calculation very difficult if not impossible. This, in fact, constitutes the main difficulty of the method. In the third part of their work Tsien and Kuo overcame this difficulty by using the asymptotic properties of the hypergeometric functions. The result is the separation of the solution in the hodograph plane into two parts. One part is of closed form and is the product of a universal function of the velocity and the same solution as for incompressible flow but with a velocity distortion or velocity correction. The other part is an infinite series which converges rapidly everywhere except in a small region on both sides of a critical circle with a radius equal to the velocity of sound in the hodograph plane. In practice, by using only a few terms of the infinite series, one can obtain a satisfactory result. As an example, the motion of air past a cylindrical body was considered. The flow patterns for two freestream Mach numbers (0.6 and 0.7) have been calculated. It should be noticed that there is considerable distortion in the shape of the body in the compressible flow from that in the incompressible flow. This paper of Tsien and Kuo had been criticized by Lighthill<sup>97</sup> (1947) and Cherry<sup>98</sup> (1947). In his answer Kuo<sup>99</sup> (1949) showed that the criticism was not justified.

Reutter<sup>100</sup> (1947) proposed asymptotic solutions of Chaplygin's equation.

Cherry<sup>98</sup> (1947) found a family of exact solutions for the two-dimensional flow of a compressible perfect fluid about a cylinder. The work is restricted to the case where the circulation is zero and the speed at large distances from the cylinder is subsonic; but there is no restriction that the speed near the cylinder be subsonic. The family of solutions involves the hypergeometric functions and an infinite set of constants, upon the values of which depends the shape of the cylinder; but the question of so disposing these constants as to suit a prescribed shape is not here entered upon. The flow-field was divided into a few parts and the analytic continuation is largely applied. The key to the matter lies in a theorem whereby a hypergeometric

<sup>93</sup> C. C. Lin: On an extension of the von Kármán-Tsien method to two-dimensional subsonic flows with circulation around closed profiles. *Quart. Appl. Math.* **4**, No. 3 (1946).

<sup>94</sup> A. Gelbart: On subsonic compressible flows by a method of correspondence. I. Methods for obtaining subsonic circulatory compressible flows about two-dimensional bodies. *N. A. C. A., T. N. No. 1170* (1947).

<sup>95</sup> S. Bartnoff and A. Gelbart: On subsonic compressible flows by a method of correspondence. II. Application of methods to studies of flow with circulation about a circular cylinder. *N. A. C. A., T. N. No. 1171* (1947).

<sup>96</sup> H. S. Tsien and Y. H. Kuo: Two-dimensional irrotational mixed subsonic and supersonic flow of a compressible fluid and the upper critical Mach number. *N. A. C. A., T. N. No. 995* (1946).

<sup>97</sup> M. I. Lighthill: The hodograph transformation in transonic flow. I. Symmetrical channels. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **191**, 323—341 (1947). The hodograph transformation in transonic flow. II. Auxiliary theorems on the hypergeometric functions  $\Psi_n(\tau)$ . *Detto*, 341—351. The hodograph transformation in transonic flow. III. Flow around a body. *Detto*, 352—369.

<sup>98</sup> T. M. Cherry: Flow of a compressible fluid about a cylinder. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **192**, 45—79 (1947). Relation between Bergman's and Chaplygin's methods of solving the hodograph equation. *Quart. Appl. Math.* **9**, 1, 92—94 (1951). Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **202**, 1071, 505—522 (1950).

<sup>99</sup> Y. H. Kuo: On the stability of transonic flows. *Proc. symposia appl. math.* **1**, 72—73, Amer. Math. Soc. (1949).

<sup>100</sup> F. Reutter: Über eine angenäherte quasilineare Potentialgleichung der ebenen kompressiblen Strömung und ihre mittels der Legendre-Transformation zu gewinnenden Lösungen. *Z. angew. Math. Mechan.* **25/27**, 156—157 (1947).



function whose parameters are large is expressed by a convergent series whose leading term represents the function asymptotically.

Lighthill<sup>97</sup> (1947) in a very extensive study applies hypergeometric functions to the solution of hodograph equation in the case of a flow in a symmetrical sub-, -trans-, -super-, -sonic channel (Part I). The construction and application of the singular solutions is thoroughly discussed and presented. Because of an extensive application of hypergeometric functions the second part is devoted entirely to auxiliary theorems on the hypergeometric functions. In the third part Lighthill making wide use of hypergeometric function presents the solution of the flow past a body. The solution is given in terms of integrals in the physical plane for the incompressible flow and can therefore be used when only data of the most numerical kind are available concerning this flow (to which the solution reduces when the Mach number tends to zero). It is shown how, when an analytic series (of a very general type) is available in the incompressible flow, the solution can be continued into the supersonic region. The solution contains an arbitrary function; so the different possible determinations of this function lead to an infinity of solutions of the compressible flow problem, all tending to the given incompressible flow as the Mach number tends to zero. It is shown that when circulation is absent all these solutions give a possible physical picture. When circulation is present, however, all the solutions but one give a physical flow which does not close up behind the body. The single solution which gives a physically sensible result in this case is determined by Lighthill. In the fourth part (Ferguson and Lighthill<sup>101</sup>, 1947-48) the tables of various kinds are given.

Kuo<sup>102</sup> (1948) slightly modified the method developed earlier by Kuo and Tsien and extended it to include flows with circulation. The essential feature of the modified method is that in analytic continuation of the solution the alteration of the singularities of the incompressible solution due to the presence of the hypergeometric functions has been taken into account. It was found that for finite Mach number the only case in which the nature of the singularities of the incompressible solution can remain unchanged is for a ratio of specific heats equal to  $-1$ . The method is applied to the flow about an elliptic cylinder of thickness ratio 0.60 and for Mach number 0.60. Bergman, in his review of the paper<sup>103</sup>, pointed out that a few results are not formulated in a sufficiently exact manner.

Oyama<sup>104</sup> (1948) investigated the compressible flow with circulation past a profile derived from an elliptic cylinder of thickness ratio 1/10, at various angles of incidence on the basis of the approximate method of Kármán-Tsien.

Goldstein, Lighthill and Craggs<sup>105</sup> (1948) proposed an alternative method of solution to the problem of finding, by use of the hodograph transformation steady, plane isentropic flows around contours. For illustrative purposes it is set out for the case when the incompressible flow is the symmetrical one about a circle. The flow with circulation was attacked by Lighthill<sup>106</sup> (1948).

<sup>101</sup> D. F. Ferguson and M. J. Lighthill: The hodograph transformation in transonic flow. IV. tables. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **192**, 135-142 (1947/48).

<sup>102</sup> Y. H. Kuo: Two-dimensional irrotational transonic flows of a compressible fluid. *N. A. C. A., T. N. No. 1445* (1948).

<sup>103</sup> S. Bergman: Review of the paper: Two-dimensional irrotational transonic flows of a compressible fluid. By Y. H. Kuo, *N. A. C. A., T. N. No. 1445* (1948): in *Math. Reviews* **11**, No. 3, 223 (1950).

<sup>104</sup> S. Oyama: Application of the hodograph method to the compressible flow with circulation past an elliptic cylinder (in Japanese). *Rep. Inst. Sci. Tech., Univ. Tokyo* **2**, 63 (1948).

<sup>105</sup> S. Goldstein, M. J. Lighthill and J. M. Craggs: On the hodograph transformation for high-speed flow. I. A flow without circulation. *Quart. J. Mech. & Appl. Math.* **1**, 344-357 (1948).



Ehlers<sup>107</sup> (1949) discussed some hodograph methods: Chaplygin's, Lighthill's, Kuo's and Tsien's, etc.

Timman<sup>108</sup> (1949) and Frankl<sup>109</sup> (1949) proposed asymptotic solutions of Chaplygin's equation.

Tollmien<sup>110</sup> (1949) established relations between the local coordinates and the velocity components without using a velocity potential or a stream-function at all. This is the so-called "direct" hodograph method.

Imai<sup>111</sup> (1949) expressed the fundamental equations in the hodograph plane in terms of new variables suggested by the W. K. B. method well-known in quantum mechanics. These new variables are just the same as those explored previously by Bergman. In the case of subsonic flow past an obstacle approximate treatment similar to Kármán-Tsien's method can be developed which is believed to be very accurate even near the critical Mach number. In the supersonic case the equations of motion in terms of new variables have the advantage of giving immediately the equations for the characteristics. Similarly like in Bergman's method an auxiliary function must be used to represent the flow around the given body in an incompressible fluid. Some numerical examples are given in the paper by Imai and Hasimoto<sup>112</sup> (1950).

Mathur<sup>113</sup> (1950) in his thesis (under the direction of the author) assumes the pressure-volume relation in the form

$$p = A - \sum_1^n B_i / \varrho^i. \quad (7.4.7)$$

Using the variable  $\tau = M^2 (2\beta + M^2)^{-1}$ ,  $\beta = (k-1)^{-1}$ , the Chaplygin's equation can be transformed into the form:

$$4\tau^2 \psi_{\tau\tau} + [4 + 2f(\tau)\tau\psi_{\tau} + [1 - f(\tau)]\psi_{\theta\theta}] = 0, \quad (7.4.8)$$

where  $f(\tau) = q^2/a^2$ . By means of the substitution

$$\psi = \tau^{k/2} Y_k(\tau) \cos k\theta, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (7.4.9)$$

equation (7.4.8) transforms into

$$\tau^2 Y_k'' + (A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2)\tau Y_k' + C_0 Y_k = 0, \quad (7.4.10)$$

where  $A_0, A_1, A_2, C_0$ , are constants. By means of another transformation, namely

$$Y_k = \tau^a e^{b\tau} y(\tau), \quad (7.4.11)$$

<sup>106</sup> M. J. Lighthill: On the hodograph transformation for high-speed flow. II. A flow with circulation. *Quart. J. Mech. & Appl. Math.* **1**, 442—450 (1948).

<sup>107</sup> F. B. Ehlers: Methods of linearization in compressible flow. Part II. Hodograph method. *Headqtrs. Air Mat. Comm. Dayton, Transl. Tech. Rep. No. F-TR-1180 B-ND* (1948).

<sup>108</sup> R. Timman: Linearization of the equations of two-dimensional subsonic compressible flow by means of complex characteristics. *Proc. Seventh Int. Congr. Appl. Mech.* **4**, 28—42 (1948). Asymptotic formulae for special solutions of the hodograph equation in compressible flow (in English). *Nal. Lucht. Lab. Amsterdam Rap. No. R. 46* (Apr. 1949).

<sup>109</sup> F. I. Frankl: Asymptotic resolution of Chaplygin's functions. *Air Mat. Com. Dayton, Transl. No. F-TS-1212-1 A* (1949).

<sup>110</sup> W. Tollmien: The direct hodograph method in the theory of the flow of compressible fluids. *H. Reissner Anniversary Volume*, 89—110, (1949), Edwards Bros., Ann Arbor.

<sup>111</sup> I. Imai: Application of the W. K. B. method to the flow of a compressible fluid, I. *J. Math. Physics* **28**, 173 (1949).

<sup>112</sup> I. Imai and H. Hasimoto: Application of the W. K. B. method to the flow of a compressible fluid, II. *J. Math. Physics* **28**, 205 (1950).

<sup>113</sup> P. N. Mathur: On compressible fluid flow by hodograph method utilizing a polynomial. Master's Degree Thesis, Dept. Aer. Eng., Univ of Illinois (1950). On the solution of Chaplygin's equation by means of Kummer's formula. *Proceedings of the Midwestern Conferences on Fluid Dynamics. I. Univ. of Illinois* (1950). *Edwards Brothers, Ann Arbor, Mich.*, 99—108.



with  $a = \text{const.}$ ,  $b = \text{const.}$ , equation (7.4.10) can be given in the form

$$\bar{\tau} y'' - (\lambda - \bar{\tau}) y' - \alpha y = 0, \quad (7.4.12)$$

where  $\alpha = \text{const.}$ ,  $\lambda = \text{const.}$ ,  $\bar{\tau} = -b\tau$ . Equation (7.4.12) has a standard solution by means of confluent hypergeometric series (Kummer's formula). From the solved particular examples it seems that Mathur's method gives a better approximation than Poritsky's approach.

Loewner<sup>114</sup> (1950) developed a transformation theory of systems of partial differential equations which allows the construction of classes of pressure-density relations depending on arbitrarily many parameters for which the equations governing the flow can be transformed into an essentially simpler form, namely, into the Cauchy-Riemann equations in the subsonic region, into the system corresponding to the wave equation in the supersonic case, and finally into that form corresponding to the Tricomi equation in the transonic region. The transition from one system of differential equations to the other is always such that only the solving of ordinary differential equations is required in order to find solutions of the more complicated system from corresponding solutions of the simpler one.

Bers<sup>115</sup> (1950) discussed simple, sufficient conditions under which a two-dimensional steady, compressible flow can be continued across the line of Mach number 1 as a continuous supersonic flow. Methods for the actual computation of the flow are described.

Weinstein<sup>116</sup> (1950) derived a new approach for the transonic flow based on the generalized axially symmetric potential theory which enables one to consider, instead of isolated examples, some flows satisfying prescribed boundary conditions. The paper deals with solutions in the hodograph plane.

Munk<sup>117</sup> (1950) discussed the Rankine flow in the hodograph plane.

Ludford<sup>118</sup> (1950) discussed the singularities in compressible flow.

Clauser<sup>119</sup> (1950) presented solutions of two-dimensional compressible fluid flows having arbitrarily specified pressure distributions for gases with gamma equal to minus one.

v. Krzywoblocki<sup>120</sup> (1951) transformed Chaplygin's equation into Fuch-Frobenius normal form by means of simple substitutions, preserving the original isentropic pressure-density relation.

<sup>114</sup> C. Loewner: A transformation theory of the partial differential equations of gas dynamics. N. A. C. A., T. N. No. 2065 (1950).

<sup>115</sup> L. Bers: On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. N. A. C. A., T. N. No. 2058 (1950).

<sup>116</sup> A. Weinstein: Transonic flow and generalized axially symmetric potential theory. Symposium on theoretical compressible flow (June 1949), Naval Ordnance Laboratory, White Oak, NOLR 1132 (Issued July 1950), 73—82.

<sup>117</sup> M. M. Munk: The Rankine gas flow in the hodograph plane. Symposium on theoretical compressible flow (June 1949), Naval Ordnance Laboratory, White Oak, NOLR 1132 (Issued July 1950), 43—51. Or: Quart. Appl. Math. 8, 387—392 (1951).

<sup>118</sup> G. S. S. Ludford: The behavior at infinity of the potential function of the flow of a perfect gas in two dimensions. Report 23a, Nav. Res. Contr. N 5 ori 76/XVI NR 043 046, Harvard Univ. (1950). Two notes on the singularities of a compressible flow in the pseudo-logarithmic plane. Report 23b, Nav. Res. Contr. N 5 ori 76/XVI NR 043 046, Harvard Univ. (1950). The behavior at infinity of the potential function of a two-dimensional subsonic compressible flow. Report 23, Nav. Res. Contr. N 5 ori 76/XVI NR 043 046, Harvard Univ., J. Math. Physics (3) 30, 117—130 (1951).

<sup>119</sup> F. H. Clauser: Two-dimensional compressible flows having arbitrarily specified pressure distributions for gases with gamma equal to minus one. Symposium on theoretical compressible flow, June, 1949, U. S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Nd., NOLR 1132 (1950).

<sup>120</sup> M. Z. v. Krzywoblocki: On the transformation of Chaplygin's equation into Fuchs-Frobenius normal form. J. Phys. Soc. Japan 6, No. 6, 452—453 (1951).



Cherry<sup>98</sup> (1951) had shown how Chaplygin's form of solution can be converted into Bergman's.

## 5. Slender bodies and bodies of revolution

v. Kármán and Moore<sup>121</sup> (1932) calculated the flow past a slender body of revolution by source and sink method.

Ferrari<sup>122</sup> (1937) attacked the problem of the flow past the body of revolution.

Tsien<sup>123</sup> (1938) extended Kármán-Moore method to bodies inclined to the direction of the undisturbed stream.

Sauer<sup>124</sup> (1942) attacked the problem of the flow past an inclined body of revolution.

Busemann<sup>125</sup> (1942) pushed forward the idea of the conical flow.

Lighthill<sup>126</sup> (1945) attacked the problem of the flow past the body of revolution.

Sears<sup>48</sup> (1946, 1947) discussed the problem of the flow past a body of revolution by means of the linearized theory.

Hayes<sup>127</sup> (1946), Bartels and Laporte<sup>128</sup> (1946) attacked the problem of the flow past conical bodies by means of the linearized theory.

Jones and Margolis<sup>129</sup> (1946) and Laitone<sup>47</sup> (1947) attacked the same problem.

Young and Kirkby<sup>130</sup> (1947) applied Prandtl-Glauert method to three-dimensional bodies.

Lighthill<sup>131</sup> (1948) calculated the lift and moment on a slender pointed body of revolution whose axis is inclined at a small angle  $\alpha$  to the uniform supersonic stream by means of the expansion in powers of the angle of incidence  $\alpha$ , including the terms of order  $\alpha^3$ .

Broderick<sup>132</sup> (1949) derived a method for solving approximately the complete equation for isentropic axi-symmetrical flow of a gas past bodies of revolution by means of expansion the velocity potential in powers of the thickness ratio of the body. The method was applied to the flow past semi-infinite cone (1949)<sup>133</sup>.

<sup>121</sup> Th. von Kármán and N. B. Moore: The resistance of slender bodies moving with supersonic velocities with special reference to projectiles. *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.* **54**, 303—310 (1932).

<sup>122</sup> C. Ferrari: Campi di corrente ipersonora attorno a solidi di rivoluzione. *L'Aerotecnica* **17**, 507—518 (1937).

<sup>123</sup> H. S. Tsien: Supersonic flow over an inclined body of revolution. *J. Aeron. Sci.* **5**, 480—483 (1938).

<sup>124</sup> R. Sauer: Überschallströmung um beliebig geformte Geschoßspitze unter kleinem Anstellwinkel. *Luftfahrtforschung* **19**, 148—152 (1942).

<sup>125</sup> A. Buseman: Conical supersonic flow with axial symmetry. *Luftfahrtforschung* **19**, 137—144 (1942). Also: R. T. P. Translation No. 1598 or *Roy. Aeron. Soc. J.* (1942).

<sup>126</sup> M. J. Lighthill: Supersonic flow past bodies of revolution. R. and M. No. 2003, British A. R. C. (1945).

<sup>127</sup> W. D. Hayes: Linearized Supersonic flows with axial symmetry. *Quart. Appl. Math.* **4**, 255—261 (1946).

<sup>128</sup> R. C. F. Bartels and O. Laporte: Investigation of the supersonic flow over conical bodies with angles of attack or yaw by means of the linearized theory. Sixth International Congress for Applied Mechanics (1946) (Paris.).

<sup>129</sup> R. T. Jones and K. Margolis: Flow over a slender body of revolution at supersonic velocities. N. A. C. A., T. N. No. 1081 (1946).

<sup>130</sup> A. D. Young and S. Kirkby: Application of the linear perturbation theory to compressible flow about bodies of revolution. *Coll. Aeron. Cranfield Rep.* No. 11 (1947).

<sup>131</sup> M. J. Lighthill: Supersonic flow past slender pointed bodies of revolution at yaw. *Quart. J. Mechan. a. Appl. Math.* **1**, 76—89 (1948).

<sup>132</sup> J. B. Broderick: Supersonic flow round pointed bodies of revolution. *Quart. J. Mechan. a. Appl. Math.* **2**, 98—120 (1949).

<sup>133</sup> J. B. Broderick: Supersonic flow past a semi-infinite cone. *Quart. J. Mechan. a. Appl. Math.* **2**, 121—128 (1949).



Ward<sup>134</sup> (1949) attacked the supersonic flow past slender pointed bodies but not necessarily of revolution.

Whitham<sup>135</sup> (1950) discussed the behavior of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis.

## 6. Southwell's and other methods

Southwell's method was applied to compressible fluid problems. Without going into too many details let us only mention the works of Southwell himself<sup>136</sup> (1940) and his followers like Christopherson<sup>137</sup> (1938), Emmons<sup>138</sup> (1943, 1944, 1946, 1948), Fox<sup>139</sup> (1944), Green<sup>140</sup> (1944), etc.

Here and there one may find other methods than those of classical types mentioned above.

Crocco<sup>141</sup> (1949) developed a new method for adiabatic but non-isentropic gas.

Guderley<sup>142</sup> (1942, 1948) and Guderley and Yoshihara<sup>143</sup> (1949, 1951) applied special transformations to particular solution of the transonic flow equation (with the approximations usually made in the derivation of the transonic similarity law) to linearize the equation and to obtain the flow pattern and pressure coefficient. A discussion of transonic flow singularities was also included.

## 7. General remarks

From the brief review of various methods, outlined above, it seems that the hodograph method probably offers the greatest possibilities. From the various methods of solutions of the hodograph equation, there are some which by themselves, from

<sup>134</sup> G. N. Ward: Supersonic flow past slender pointed bodies. *Quart. J. Mechan. a. Appl. Math.* **2**, 75—97 (1949).

<sup>135</sup> G. B. Whitham: The behavior of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **201**, 89—109 (1950).

<sup>136</sup> R. V. Southwell: *Relaxation methods in engineering science*. Oxford: Clarendon Press. 1940.

<sup>137</sup> Christopherson and R. V. Southwell: Relaxation methods applied to engineering problems. III. Problems involving two independent variables. *Proc. Roy. Soc. London*, **168**, 317—350 (1938).

<sup>138</sup> H. W. Emmons: The numerical solution of heat conduction problems. *Trans. Amer. Soc. Mechan. Eng.* **65**, 607—615 (1943). The numerical solution of compressible fluid flow problems. *N. A. C. A., T. N. No. 932* (1944). The theoretical flow of a frictionless, adiabatic, perfect gas inside of a two-dimensional hyperbolic nozzle. *N. A. C. A., T. N. No. 1003* (1946). Flow of a compressible fluid past a symmetrical airfoil in a wind tunnel and in free air. *N. A. C. A., T. N. No. 1746* (1948).

<sup>139</sup> L. Fox and R. V. Southwell: On the flow of a gas through a nozzle with velocities exceeding the speed of sound. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **183**, 38—54 (1944).

<sup>140</sup> J. R. Green and R. V. Southwell: Relaxation methods applied to engineering problems. IX. High-speed flow of compressible fluid through a two-dimensional nozzle. *Philos. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A* **239**, 367—386 (1944).

<sup>141</sup> L. Crocco: Una nuova funzione potenziale per lo studio del moto bidimensionale non-isentropico dei gas. *Aerotecnica* **29**, 347—355 (1949). Transformations of the hodograph flow equation and the introduction of two generalized potential functions. *N. A. C. A., T. N. No. 2432*, 81, Aug. (1951).

<sup>142</sup> G. Guderley: Rückkehrkanten in ebener kompressibler Potentialströmung. *Z. angew. Math. Mechan.* **22**, 121—126 (1942). Considerations on the structure of mixed subsonic-supersonic flow patterns. U. S. Air Force Report, F-TR-2168-ND, Oct. (1947). Singularities at the sonic velocity. Wright Field Report F-TR-1171-ND, June (1948).

<sup>143</sup> G. Guderley and H. Yoshihara: The flow over a wedge profile at Mach number one. U. S. A. F. Technical Report No. 5783, July (1949). On axial-symmetric transonic flow patterns. U. S. A. F. Technical Report No. 5797, Sept. (1949). The flow over a wedge profile at Mach number 1. *J. Aeron. Sci.* **17**, 723—735 (1950). An axial-symmetric transonic flow pattern. *Quart. Appl. Math.* **8**, (4), 333—339 (1951).



the nature of their construction seem to offer some greater possibilities both from the mathematical as well as from an applicable standpoint than do the others. Lighthill<sup>144</sup> (1949) mentioned that only the methods of Bergman, Cherry and himself are correct. In his review of one Bergman's papers<sup>145</sup> (1949) he wrote that the analysis of Tricomi's equation has not been previously extended so far as in the paper of Bergman. Bers<sup>146</sup> (1950) wrote: "The so-called correspondence method was first used by Chaplygin for jet problems (where, however, it is identical with the solution of the so-called direct problem). The correspondence method may be expressed in various analytical forms; however, except for the very original method of Bergman the basic procedure is always the same, as is clearly pointed out by Gelbart<sup>81</sup> (1943) (but those remarks of Gelbart could not refer to methods of Cherry and Lighthill published later). It consists of associating with a solution of the Cauchy-Riemann equations (representing an incompressible flow) a solution of Chaplygin's hodograph equation. In some cases the resulting compressible flow is of the same character as the initial incompressible flow."

From these opinions expressed independently by other authors it is quite obvious that Bergman's method is today considered to be one of the strongest. The question of two types of functions appearing in this method: those which can be calculated once and for all; and those which must be recalculated in each particular case, may be solved with some effort. This statement may be confirmed by the calculation of the long tables for the conical flow<sup>147</sup> (1947).

## Part VIII

### Review of Tables and Particular formulas

#### 1. Subsonic flow

The expression for  $[1 - M^2(2\lambda)]^{1/2}$  as a function (exponential expansion) of  $\lambda$ , (which expression occurs in section I. 3 and in subsequent parts of the present work) is given in <sup>148</sup>. The quantity  $\lambda$  is given by (1.3.13).

The evaluation of the several first coefficients  $Q^{(n)}$  (1.9.3) which appear in the solution of equation (1.7.7) is given in <sup>148</sup>. The values of the derivatives  $\psi_q$  and  $\psi_\theta$  are given in <sup>148</sup>.

The values of  $H$ ,  $Q^{(n)}$ , for  $k = -0.5$  and  $k = 1.4$  are given numerically in tables IIa and IIb, <sup>148</sup>. Also their diagrams are given in that report.

The proof that  $f$  (1.3.11) can be approximated by a polynomial  $f_m$  (1.7.6) is given in <sup>148</sup>.

The representation of  $f_m$  by means of  $M^2$ , and of  $M^2$ , or  $S = 1 - T$ , by means of a uniformly convergent series in  $\exp(2\lambda)$  is given in <sup>148</sup>.

The representations  $T = T(\exp(2n\lambda))$  and  $T^{-1} = T^{-1}(\exp(2n\lambda))$  are given in <sup>149</sup> jointly with the tables of the coefficients.

<sup>144</sup> M. J. Lighthill: Methods for predicting phenomena in the high-speed flow of gases. *J. Aeron. Sci.* **16**, 69—83 (1949).

<sup>145</sup> M. J. Lighthill: Review of Bergman's paper: Two-dimensional transonic flow patterns. *Amer. J. Math.* **70** (1948). *Math. Reviews* **10**, 752—753 (1949).

<sup>146</sup> L. Bers: Velocity distribution on wing sections of arbitrary shape in compressible potential flow. III. Circulatory flow obeying the simplified density-speed relation. *N. A. C. A., T. N.* No. 2056 (1950).

<sup>147</sup> Z. Kopal: Tables of supersonic flow around cones. *M. I. T., Cambridge, Mass.* (1947).

<sup>148</sup> S. Bergman: On two-dimensional flows of compressible fluids. *N. A. C. A., T. N.* No. 972 (1945).

<sup>149</sup> S. Bergman: Methods for determination and computation of flow patterns of a compressible fluid. *N. A. C. A., T. N.* No. 1018 (1946).

An example showing the application of the formula (1.9.9) for  $k = -0.5$  and  $k = 1.4$  is given in <sup>150</sup>. The function  $g(\bar{Z})$  is assumed to be equal to  $\frac{1}{2} [(1 - 2 \exp \bar{Z})^{-1/2} + (1 - 2 \exp \bar{Z})^{1/2}]$ . The example shows clearly three steps of calculations:

I. Computation of the functions  $g^{(n)}(\bar{Z})$ .

II. Construction of the flow in the pseudo-logarithmic plane for  $\alpha = 0.1$ .

III. Transition from the pseudo-logarithmic plane to the physical plane by means of formula (1.8.1). In this same report <sup>150</sup> there are tabulated the functions  $Q^{(n)}$  (which can be calculated once and for all). Also their diagrams are given.

An application of punch-card machines to the solution of a problem is given in <sup>149</sup>. Equation (1.9.16) is used in its approximate and exact forms. In the Appendix I of that report the method of obtaining the polynomials in  $\exp(2\lambda)$  of the approximation function  $f_m(2\lambda)$  is given.

A method for the numerical determination of the coefficients of the integral operator (1.9.2) by the use of punch card machines is given in <sup>151</sup>. The procedure of the numerical determination of the system of functions  $Q^{(n)}$  is thoroughly explained in that report.

Determination of those coefficients of the integral operator by interpolatory means is thoroughly presented in <sup>152</sup>.

An example of how to determine a basic solution is given in <sup>149</sup>. A thorough and detailed discussion and determination of a flow pattern past an obstacle of oval shape is given in that report. The values of the following functions are included into that report:  $T, M, \lambda, H, dH/d\lambda, Q^{(n)}, Q^{(n)'}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , for  $k = 1.405$ . These functions are calculated once and for all and can always be used. In this report also the functions  $g^{[n]}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , are calculated for a flow around an ellipse in an incompressible fluid. A method for the determination of the stream function in the  $(\lambda, \theta)$ -plane and in the physical plane is explained.

Reference <sup>153</sup> contains the values of the functions  $A^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, 8$ , and their derivatives, as well as the values of the function  $F(\lambda)$  and its derivative. Tables 1 to 4 in that report give the values of  $T = T(\exp(2\lambda))$ ,  $T^{-1} = T^{-1}(\exp(2\lambda))$ ,  $F = F(\exp(2n\lambda))$ ,  $M, B, q/\alpha_0$  and  $\lambda$ . The first four functions  $Q^{(n)}$  can be expressed in closed forms as functions of  $T$ , while in the expressions for the last four functions  $Q^{(n)}$ ,  $n = 5$  to 8, the integrals appear. However, the integrands in these cases can be written in closed forms, so that at least numerical computation of the integrals will not prove too difficult. Auxiliary functions for the computation of  $Q^{(n)}$  are on p. 78 and Table 5 of that report. The values of the coefficients in equations (1.9.23a, b) are given on pp. 37 and 75 of <sup>153</sup>. The fundamental solutions for  $k = -1$  are given in <sup>148</sup> (see 6.5.8).

## 2. Supersonic flow

The numerical values of  $A = A(M)$ , equation (3.2.8) are given in <sup>149</sup>. Attention should be called to the fact that in this report  $A(M) = \beta(M)$ .

<sup>150</sup> S. Bergman: Graphical and analytical methods for the determination of a flow of a compressible fluid around an obstacle. N. A. C. A., T. N. No. 973 (1945).

<sup>151</sup> S. Bergman and L. Greenstone: Numerical determination by use of special computational devices of an integral operator in the theory of compressible fluids. I. Determination of the coefficients of the integral operator by use of punch card machines. J. Math. Physics **26**, 1—9 (1947).

<sup>152</sup> R. Isaacs: Numerical determination by use of special computational devices of an integral operator in the theory of compressible fluids. II. Determination of the coefficients of the integral operator by interpolatory means. J. Math. Physics **26**, 165—181 (1947).

<sup>153</sup> S. Bergman: On supersonic and partially supersonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1096 (1946).



An example of numerical calculation of the functions  $V_1^*$  and  $V_2^*$ , representing the solutions of (3.9.2) is given in <sup>153</sup>. In Table 9 of that report the values of the functions,  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , (3.10.1) and (3.10.2) are given.

The tables of quantities  $B$ ,  $2 A$ ,  $F_1$ ,  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ , (3.5.1), (3.5.2) are given in <sup>154</sup>.

3. Transonic flow

Equations for  $dS_v^{(k)}/d\tau$ ,  $dF_v/d(1 - \tau)$ , and  $dF_v^*/d(1 - \tau)$ , referring to (4.4.17) are given in <sup>148</sup>.

The expressions for  $Q^{(n)}(2\lambda)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  are given in <sup>153</sup>.

In <sup>155</sup> are given the tables of the type I of the functions

$$\psi^{(v)}(\eta, \theta; \eta_0) \text{ for } \eta_0 = -0.02, \tag{4.9.20}$$

$$\varphi^{(v)}(\eta, \theta; -0.02), \tag{4.9.30}$$

and a conversion table from the variable  $\eta$  to  $M$  and vice versa. In that paper there are also given the tables referring to a numerical calculation of the flow pattern around an oval-shaped obstacle.

4. General remarks

Since in his papers Bergman does not use a consistent notation, for the sake of enabling one to compare various formulas in his and von Mises’ and Schiffer’s papers, below we shall cite some formulas and symbols.

In <sup>156</sup> the following notations are used:

$$z = \theta + i\lambda = i\bar{Z}, \quad \bar{z} = \theta - i\lambda = -iZ, \tag{8.4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) = -\frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}, \tag{8.4.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial Z}. \tag{8.4.2b}$$

The fundamental formula of Bergman is (1.9.2) which may be represented as

$$\psi^* = Re \left[ g(Z) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} Q^{(n)} B(n, n+1)^{-1} \cdot (-1)^{n-1} \int_{\beta=0}^Z (Z-\beta)^{n-1} g(\beta) d\beta \right], \tag{8.4.3}$$

where

$$B(n, n+1) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{n! (n-1)!}{2n!}, \tag{8.4.3a}$$

and the formula in v. Mises’ and Schiffer’s notations is:

$$\psi^* = Re \left[ g(Z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{(-1)^n}{(n-1)! 2^n} \cdot \int_0^Z g(t) (Z-t)^{n-1} dt \right]. \tag{8.4.4}$$

The table, given below, enables one to compare the notation of Bergman and v. Mises and Schiffer.

	(2.15)		(2.9)	(2.6)	(2.2)
Bergman <sup>157</sup> , p. 861 .....	$M^2$	$4 F$	$2 N$	$\lambda$	$l$
v. Mises <sup>158</sup> , p. 254 .....	$m$	$f$	$n$	$\lambda$	$z^2$
	2.(3')		2.(8)	4.(12)	1.(3)

<sup>154</sup> S. Bergman: On two-dimensional supersonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1875 (1949).  
<sup>155</sup> S. Bergman: On tables for the determination of transonic flow patterns. Hans Reissner Anniversary Volume; Contributions to Applied Mechanics. J. W. Edwards. 1949.  
<sup>156</sup> S. Bergman: Two-dimensional subsonic flows of a compressible fluid and their singularities. Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 452—498 (1947).  
<sup>157</sup> S. Bergman: Two-dimensional transonic flow patterns. Amer. J. Math. **70**, 856—891 (1948).  
<sup>158</sup> R. von Mises and M. Schiffer: On Bergman’s integration method in two-dimensional compressible fluid flow. Advances in Applied Mechanics, Vol. I. New York: Academic Press Inc. 1948.

## Part IX

## Concluding Remarks

In previous sections we presented Bergman's integral operator method in some of its variations (sub-, trans-, supersonic, axially symmetric flow, etc.). But for a mathematically advanced reader, it is obvious that the method presents some further possibilities which may be realized in the future. In the present section we shall briefly present a few of them.

### 1. Application of the hodograph method in the three-dimensional case and to flows with shocks

Assume a three-dimensional irrotational flow of a compressible fluid and introduce the notion of the velocity potential,  $\Phi_x = u$ ,  $\Phi_y = v$ ,  $\Phi_z = w$ . The continuity equation has the form

$$(\rho \Phi_x)_x + (\rho \Phi_y)_y + (\rho \Phi_z)_z = 0. \quad (9.1.1)$$

Introduce a new unknown function:

$$\lambda = xu + yv + zw - \Phi. \quad (9.1.2)$$

Inserting into (9.1.1) the quantities  $\Phi_x = u$ , etc., and combining (9.1.1) and (9.1.2) the following equation in  $\lambda$  results:

$$(\rho_u u + \rho) D_1 - \rho_v u D_2 + \rho_w u D_3 - \rho_u v D_4 + (\rho_v v + \rho) D_5 - \\ - \rho_w v D_6 + \rho_u w D_7 - \rho_v w D_8 + (\rho_w w + \rho) D_9 = 0, \quad (9.1.3)$$

where the symbols  $D_i$ ,  $i = 1$  to 9, denote determinants of the form

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{vv} & \lambda_{vw} \\ \lambda_{vw} & \lambda_{ww} \end{vmatrix}, \text{ etc.} \quad (9.1.4)$$

There now arises the problem of determining particular solutions of (9.1.3). Clearly, this can be done by using the series development

$$\sum_{m,n,p} A_{mnp} u^m v^n w^p, \quad (9.1.5)$$

which satisfy equation (9.1.3). Such a series development which represents (in the hodograph space) the potential function  $\Phi$  of a possible flow pattern of a compressible fluid converges only in the neighborhood of the origin. However, there exist methods of determining  $\Phi$  in the whole region of the real  $(u, v, w)$ -space where  $\Phi$  is regular. Such a representation, for instance, is given in many cases by

$$\Phi(x, y, z) = \lim_{k \rightarrow 0} \sum_{m,n,p} A_{mnp} u^m v^n w^p \{\Gamma[1 + k(m + n + p)]\}^{-1}. \quad (9.1.6)$$

Another way to solve a three-dimensional problem, namely the case of an axially symmetric flow, was demonstrated in section V. But, in general, the three-dimensional case up to now cannot be solved in such an elegant manner as a two-dimensional flow. (For more details see<sup>148</sup>.)

There are indications that it may be possible to extend Bergman's method to flows with shocks (discontinuities).

### 2. The method of orthogonal functions and the theory of integral operators

As we indicated in previous sections, many problems in the theory of compressible fluids may be solved by the hodograph method which enables us to consider a linear equation instead of a non-linear one. In particular, this method enables us to handle



the mixed case. On the other hand, there are many problems in the two-dimensional case where it seems to be preferable to work directly in the physical plane. Further, in many instances, for examples, in the case of a three-dimensional motion, we are unable to reduce the equation to a linear one. Hence, it is of importance to develop a method of working directly in the physical plane, in which case we have to solve a non-linear partial differential equation.

Bergman and Schiffer<sup>159</sup> developed certain considerations which enable us to use methods of the theory of complex orthogonal functions for the solution of linear and non-linear partial differential equations. Naturally, it is impossible in the case of a non-linear equation, to introduce a linear operator which transforms in a bi-uniform manner analytic functions of one complex variable into solutions of this equation, and vice versa. But it is possible to derive certain properties of solutions of non-linear partial differential equations, in particular, those which appear in the theory of compressible fluids.

Suppose at first that the density  $\varrho$  is known at every point of a flow past a profile  $P$ . Then the potential function  $\Phi$  can be defined as the solution of the differential equation

$$\Delta\Phi + \varrho^{-1}(\varrho_x\Phi_x + \varrho_y\Phi_y) = 0, \quad \Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}, \quad (9.2.1)$$

which is defined in  $B$  (the exterior of  $P$ ), satisfies on the boundary  $C$  of  $B$  the condition

$$\Phi_n = 0, \quad (9.2.2)$$

(since along the contour there is only the tangential velocity component), and at infinity possesses a singularity representing a doublet. Instead of  $\Phi$  we can introduce the function  $\Phi^* = \Phi/h$ ,  $h = \varrho^{-1/2}$ . Then  $\Phi^*$  satisfies in  $B$  the equation

$$L^*(\Phi^*) = \Delta\Phi^* + 4P_1\Phi^* = 0, \quad (9.2.2)$$

$$P_1 = -4\varrho^{-1/2}\Delta(\varrho^{1/2}), \quad (9.2.2a)$$

satisfies the boundary condition

$$B_1(\Phi^*) = \Phi_n^* - q_1\Phi^* = 0, \quad (9.2.3)$$

$$q_1 = -h^{-1}(\partial h/\partial n), \quad (9.2.3a)$$

and has a singularity at infinity. Let us assume that  $P_1 < 0$ . The determination of  $\Phi$  can be reduced to the determination of a function  $\Phi^*$  which satisfies (9.2.2) in  $B$  and satisfies the condition  $B_1(\Phi^*) = p$ , say, on the boundary  $C$ . This can be achieved by the use of the theory of orthogonal functions. Let  $a(x, y)$  and  $b(x, y)$  be two functions twice differentiable in  $B + C$  and such that

$$\iint_B (a_x + b_y) dx dy = \int_C g(s) ds, \quad (9.2.4)$$

and

$$a \cos(n, x) + b \cos(n, y) = g(s). \quad (9.2.5)$$

We introduce now a complete system  $\{\Phi_\nu^*\}$ ,  $\nu = 1, 2$ , of solutions of (9.2.2) which are orthogonalized so that

$$R(\Phi_\nu^*, \Phi_\mu^*) = \iint_B \left[ \frac{\partial \Phi_\nu^*}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\mu^*}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_\nu^*}{\partial y} \frac{\partial \Phi_\mu^*}{\partial y} - 4P_1\Phi_\nu^*\Phi_\mu^* - (a\Phi_\nu^*\Phi_\mu^*)_x - (b\Phi_\nu^*\Phi_\mu^*)_y \right] dx dy = \delta_{\nu\mu}, \quad (9.2.6)$$

<sup>159</sup> S. Bergman and M. Schiffer: A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order. *Duke Math. J.* **14**, 609—638 (1947). On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 1141—1151 (1947). Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type. *Duke Math. J.* **15**, 535—566 (1948).

where

$$\begin{aligned}\delta_{\nu\mu} &= 1, & \text{for } \nu = \mu, \\ \delta_{\nu\mu} &= 0, & \text{for } \nu \neq \mu.\end{aligned}\quad (9.2.7)$$

Then every solution  $\Phi^*$  of (9.2.2) in  $B$  can be written in the form

$$\Phi^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \Phi_{\nu}^*, \quad (9.2.8)$$

$$a_{\nu} = \int_C \{ \Phi_{\nu}^* [(\Phi^*)_n - q \Phi_{\nu}^*] \} ds. \quad (9.2.8a)$$

This result enables us to determine the desired potential function  $\Phi$ .

In order to solve the non-linear equation, we apply the method of successive approximations in the following manner. At first we determine as a first approximation, the potential function  $\Phi^{(1)}$  for the incompressible fluid case. By using then the formula

$$\varrho^{(2)} = [1 - 1/2 (k - 1/2) a_0^{-1} (\Phi_x^{(1)2} + \Phi_y^{(1)2})], \quad (9.2.9)$$

we determine the second approximation for the density. Using  $\varrho^{(2)}(x, y)$  we determine the second approximation for  $\Phi$ , say  $\Phi^{(2)}$ . Substituting it in the right-hand side of (9.2.9) we obtain the third approximation  $\varrho^{(3)}$ , and so on. As it can be shown, the procedure converges in certain cases, in which it yields the desired solution of the non-linear equation.

### 3. General remarks

On the base of a brief review (Part VII) of other methods available in the theory of compressible fluids we have shown that Bergman's method is one of the most general. Generally, Bergman's solutions are convergent in a much larger domain than all the expansions which involve hypergeometric functions. The presented method may serve in some cases as the starting point for methods of solution in more complicated cases, such as three-dimensional flows, etc. There are indications that it will be possible to find a solution valid in the entire plane of the exact compressibility equation (in the sub-, trans-, and supersonic regions). It may also be possible to extend the method to the case of flows with shocks. Since in all those cases the fundamental method will remain the same, the same tables if calculated precisely once and for all, can be used. This is undoubtedly a great advantage of this method.

## Part X

### List of Tables

Some tables will be given below. No attempt will be made to include long tables of various functions and coefficients which may be found in special papers by Bergman, as listed in Part VIII.

#### 1. Subsonic flow

$$\begin{aligned}(a) T(2\lambda) &= 1 - M^2(2\lambda)^{1/2} = \\ &= 1 - X - (1/2)(2k+1)X^2 - (1/4)(4k^2+6k+3)X^3 \\ &\quad - (1/24)(24k^3+68k^2+76k+29)X^4 \\ &\quad - (1/48)(48k^4+212k^3+392k^2+328k+103)X^5 \\ &\quad - (1/480)(480k^5+2976k^4+7968k^3+10788k^2+7266k+1935)X^6 \\ &\quad - (1/2880)(2880k^6+23472k^5+84232k^4 \\ &\quad + 162124k^3+173940k^2+98086k+22675)X^7 - \dots \\ X &= 2 \left[ \frac{(k+1)^{1/2} - (k-1)^{1/2}}{(k+1)^{1/2} + (k-1)^{1/2}} \right] \left( \frac{k+1}{k-1} \right)^{1/2} \exp(2\lambda).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (b) \quad Q^{(1)} &= -4 \int_{-\infty}^{\lambda} F d\lambda = -2 \int_1^{T(2\lambda)} F \frac{d(2\lambda)}{dT} dT = - (1/8) \int_1^T \left[ \frac{5(1+k)}{T^6} - \frac{12k}{T^4} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(3k-7)}{T^2} + 4(k+2) - (3k-1)T^2 \right] \frac{T^2}{(T^2-1)(1-h^2T^2)} dT = \\
 &= \frac{(k+1)}{8} \left[ -\frac{5}{3T^3} + \frac{2k}{(k+1)T} + \frac{(1-3k)}{(k-1)}T + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{h(k+1)^2(k-1)} \log \frac{1+(k-1)^{1/2}(k+1)^{-1/2}T}{1-(k-1)^{1/2}(k+1)^{-1/2}T} \right]_{T=1}^T, \\
 Q^{(2)} &= \frac{4}{3}F + \frac{1}{6}Q^{(1)2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \psi_0 &= H [Re g_z + (1/2)Q^{(1)} Re g + (3/4)Q^{(2)} Re g^{(1)} + \dots], \\
 \psi_a &= R^{(0)} Im g_z + R^{(1)} Im g + (1/2)R^{(2)} Im g^{(1)} \\
 &\quad + (3/4)R^{(3)} Im g^{(2)} + \dots \frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2n-2}\Gamma(n)} R^{(n)} Im g^{(n-1)} + \dots, \\
 R^{(0)} &= H \frac{d\lambda}{dq}, \quad R^{(1)} = H_a + (1/2)HQ^{(1)} \frac{d\lambda}{dq}, \\
 R^{(n)} &= [(HQ^{(n-1)})_\lambda + \frac{2n(2n-1)}{4n} HQ^{(n)}] \frac{d\lambda}{dq}, \\
 n &= 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

$Re$  = real part,  $Im$  = imaginary part.

$$\begin{aligned}
 (d) \quad F_m(M) &= \frac{(k+1)}{64} M^4 [- (3k-1)M^4 - 4(3-2k)M^2 + 16] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \sum_{\nu=1}^n (\nu^{-3}) (-1)^\nu M^{2\nu} \right], \\
 M^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k X^k, \\
 s &= 1 - (1 - M^2)^{1/2}, \\
 X &= \frac{s}{(2-s)} \left\{ 2 \frac{(h^{-1}+1-s)}{(h^{-1}-1+s)} \left[ \frac{(h^{-1}-1)}{(h^{-1}+1)} \right]^{1/2} \right\}, \\
 h &= (k-1)^{1/2}(k+1)^{-1/2}, \quad k > 1, \quad s = \exp(i\Phi), \\
 X &= (5 - 4 \cos \Phi)^{-1/2} M^{1/(2h)}, \\
 M &= \frac{(h^{-1}+1)^2 + 1 - 2(h^{-1}+1) \cos \Phi}{(h^{-1}-1)^2 + 1 + 2(h^{-1}-1) \cos \Phi}, \\
 X &= s - (1/2)(2k+1)s^2 + (1/4)(4k^2+2k-1)s^3 \\
 &\quad - (1/24)(24k^3+8k^2-14k-1)s^4 + \\
 &\quad + (1/48)(48k^4+4k^3-44k^2+2k+5)s^5 \\
 &\quad - (1/480)(480k^5-104k^4-572k^3+148k^2+126k-25)s^6 \\
 &\quad + (1/2880)(2880k^6-1584k^5-3944k^4+2212k^3+1140k^2- \\
 &\quad - 602k-5)s^7 + \dots, \\
 s &= X + (1/2)(2k+1)X^2 + (1/4)(4k^2+6k+3)X^3 + \\
 &\quad + (1/24)(24k^3+68k^2+76k+29)X^4 + (1/48)(48k^4+\dots)X^5 \\
 &\quad + \dots \text{ similar to (a) with opposite signs.}
 \end{aligned}$$

$$(e) \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_1^n,$$

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X_1^n.$$

$X$  is given by formula (a);  $X_1 = \exp(2\lambda)$ .

For  $k = 1.4$ :

$$X = 0.239 \exp(2\lambda).$$

$n$	$-A_n$	$-a_n$	$B_n$	$b_n$
0	— 1	— 1	1	1
1	1	.2392	1	.2392
2	1.9	.1087	2.9	.1659
3	4.81	.0658	9.61	.1315
4	13.939	.0456	33.869	.1108
5	43.68	.0342	123.696	.0968
6	144.02	.0270	462.39	.0865
7	492.11	.0220		.0786
8		.0185		.0724
9		.0158		.0672
10		.0138		.0629

$$(f) F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(2n\lambda),$$

$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
0.0000	0.0000	0.1373	0.2858	0.4333	0.6073	0.7241	0.8678	1.011	1.153

(g) Fundamental solutions for  $k = -1$  (see 6.5.8):

$$W^{(0)} = (1/2) \log [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2],$$

$$W^{(1)} = (\theta - \theta_0) [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2]^{-1},$$

$$q_0 + i\theta_0 = a_0, \quad \lambda = (1/2) \log \left\{ \frac{[1 + (q/a_0)^2]^{1/2} - 1}{[1 + (q/a_0)^2]^{1/2} + 1} \right\},$$

$$\lambda_0 = (1/2) \log \left\{ \frac{[1 + (q_0/a_0)^2]^{1/2} - 1}{[1 + (q_0/a_0)^2]^{1/2} + 1} \right\},$$

$$W^{(01)} = W_{\lambda}^{(0)} = (\lambda - \lambda_0) [(\lambda - \lambda_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2]^{-1}.$$

## 2. Transonic flow

Conversion of  $M$  to  $\eta \equiv H$  (4.5.1):

$M$	$\eta$	$M$	$\eta$
.60	— .1977	.92	— .0336
.62	— .1857	.94	— .0245
.64	— .1750	.96	— .0165
.66	— .1616	.98	— .0083
.68	— .1541	1.00	0.0000
.70	— .1407	1.01	.0044
.72	— .1307	1.02	.0079
.74	— .1195	1.03	.0120
.76	— .1087	1.04	.0160
.78	— .0978	1.05	.0197
.80	— .0887	1.06	.0234
.82	— .0787	1.07	.0274
.84	— .0692	1.08	.0312
.86	— .0603	1.09	.0350
.88	— .0513	1.10	.0387
.90	— .0421		



## Part XI

## Examples

To illustrate the theory presented above, we shall outline briefly a few examples.

## 1. Subsonic flow

We shall outline the construction of the compressible fluid flow generated by the function<sup>150</sup>:

$$g(\bar{Z}) = 1/2 [(1 - 2 \exp \bar{Z})^{-1/2} + (1 - 2 \exp \bar{Z})^{-1/2}]. \quad (11.1.1)$$

In the case of an incompressible fluid, this function would lead to the circulation-free flow past a circular cylinder. In the case of a compressible fluid, a flow past a cylinder of somewhat distorted section is obtained. The actual computation consists of the following steps:

- I. Computation of the function  $g^{(n)}(\bar{Z})$ .
- II. Construction of the flow in the pseudo-logarithmic plane.
- III. Transition from the pseudo-logarithmic plane to the physical plane.

## Step I

The functions  $g^{(n)}(\bar{Z})$  are defined by (1.9.2a). In general, it will be impossible to evaluate the integrals in closed form:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(Z) = \int_0^{\bar{Z}} g^{(n)}(\bar{Z}) d\bar{Z} = \int_0^{\lambda-i\theta} [\Phi^{(n)}(\lambda, \theta) + i\psi^{(n)}(\lambda, \theta)] \cdot (d\lambda - i d\theta) = \int_0^{\lambda, \theta} (\Phi^{(n)} d\lambda + \\ + \psi^{(n)} d\theta) + i \int_0^{\lambda, \theta} (-\Phi^{(n)} d\theta + \psi^{(n)} d\lambda), \end{aligned} \quad (11.1.2)$$

where

$$\Phi^{(n)} + i\psi^{(n)} = g^{(n)}; \quad (11.1.2a)$$

however, it is possible to use numerical integration. Since  $g^{(n)}(Z)$  is an analytic function of a complex variable, the value of the integral  $\int_0^{\bar{Z}} g^{(n)}(\bar{Z}) d\bar{Z}$  is independent of the path of integration. A very convenient path consists of the interval  $[(0, 0), (\lambda, 0)]$  of the negative real axis, followed by the interval  $[(\lambda, 0), (\lambda, \theta)]$  along a line parallel to the  $\theta$ -axis, provided this path lies within the image of the flow in the pseudo-logarithmic plane. If this is not the case, an obvious adjustment must be made. Dividing each of these intervals into  $s$ -subintervals  $\Delta\lambda_k, \Delta\theta_k$ , gives approximately:

$$g^{(n+1)}(\bar{Z}) = \sum_{k=1}^s [(\Phi_k^{(n)} + i\psi_k^{(n)}) \Delta\lambda_k + (\psi_k^{(n)} - i\Phi_k^{(n)}) \Delta\theta_k]. \quad (11.1.3)$$

In many instances it is more convenient to expand  $g(\bar{Z})$  into an infinite series and then integrate, term by term. However, as a rule, the function  $g(\bar{Z})$  has singularities, and several series developments are needed in order to cover the domain in which the function is to be considered. For the case of function (11.1.1), the integral  $\int g d\bar{Z}$  can be computed in closed form. Then

$$\int_0^{\bar{Z}} g(\bar{Z}) d\bar{Z} = 1 - 2 \exp \bar{Z}^{1/2} + \log [\exp \bar{Z} - 1 + (1 - 2 \exp \bar{Z})^{1/2}] - \bar{Z} - i(1 + \pi/2), \quad (11.1.4)$$

and

$$T_0(\lambda, \theta) = \text{Im} [g(\bar{Z})] = 2^{-3/2} (-A_0 + B_0^{1/2})^{1/2} (1 - B^{-1/2}), \quad (11.1.5)$$

where

$$A_0 = (1 - 2 \cos \theta \exp \lambda), \quad (11.1.5a)$$

$$B_0 = (1 - 4 \cos \theta \exp \lambda + 4 \exp (2 \lambda)), \quad (11.1.5b)$$

$$T_1(\lambda, \theta) = \text{Im} \left[ \int_0^{\bar{Z}} g(\bar{Z}) d\bar{Z} \right] = 2^{-1/2} (-A_0 + B_0^{1/2})^{1/2} - \frac{\theta}{2} - \\ - (1 + \pi/2) + 1/2 \tan^{-1} (C_1 D_1^{-1}), \quad (11.1.6)$$

$$C_1 = 2^{1/2} \sin \theta \exp \lambda + [-A_0 B_0^{1/2}]^{1/2}, \quad (11.1.6a)$$

$$D_1 = 2^{1/2} (\cos \theta \exp \lambda - 1) - [A_0 + B_0^{1/2}]^{1/2}. \quad (11.1.6b)$$

One may easily calculate the values of  $T_0(\lambda, \theta)$  and  $T_1(\lambda, \theta)$  for various values of  $(\lambda, \theta)^{150}$ . The functions  $g$ ,  $T_0(\lambda, \theta)$  and  $T_1(\lambda, \theta)$  can be represented by the following series:

For  $-0.691 < \lambda < 0$ :

$$g = i 2^{1/2} [\exp(\bar{Z}/2) - (3/4) \exp(-\bar{Z}/2) - \frac{5}{32} \exp(-\frac{3\bar{Z}}{2}) - \\ - \frac{7}{128} \exp(-\frac{5\bar{Z}}{2}) - \frac{45}{2048} \exp(-7\bar{Z}/2) - \dots], \quad (11.1.7)$$

$$T_0 = 2^{1/2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(\lambda/2) - (3/4) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - \right. \\ \left. - (5/32) \cos(3\theta/2) \exp(-3\lambda/2) - (7/128) \cos(5\theta/2) \exp \cdot \right. \\ \left. \cdot (-5\lambda/2) - (45/2048) \cos(7\theta/2) \exp(-7\lambda/2) + \dots \right], \quad (11.1.8)$$

$$T_1 = 2^{1/2} [2 (\cos(\theta/2) \exp(\lambda/2) - 1) + \\ + (3/4) \cdot (2/1) (\cos(\theta/2) \exp(-\lambda/2) - 1) + (5/32) \cdot (2/3) \cdot \\ \cdot (\cos(3\theta/2) \exp(-3\lambda/2) - 1) + (7/128) \cdot (2/5) (\cos(5\theta/2) \cdot \\ \cdot \exp(-5\lambda/2) - 1) + (45/2048) \cdot (2/7) (\cos(7\theta/2) \exp \cdot (-7\lambda/2) - 1) + \dots]. \quad (11.1.9)$$

For  $\lambda < -0.691$ :

$$g = -2 [1 + (1/2) \exp(2\bar{Z}) + \exp(3\bar{Z}) + (15/8) \exp(4\bar{Z}) + \\ + (7/2) \exp(5\bar{Z}) + \dots], \quad (11.1.10)$$

$$T_0 = -2 [(1/2) \sin(2\theta) \exp(2\lambda) + \sin(3\theta) \exp(3\lambda) + \\ + (15/8) \sin(4\theta) \exp(4\lambda) + (7/2) \sin(5\theta) \exp(5\lambda) + \dots], \quad (11.1.11)$$

$$T_1 = -2 [\theta + (1/4) \sin(2\theta) \exp(2\lambda) + (1/3) \sin(3\theta) \exp(3\lambda) + \\ + (15/32) \sin(4\theta) \exp(4\lambda) + (7/10) \sin(5\theta) \exp(5\lambda) + \dots]. \quad (11.1.12)$$

## Step II

The construction of the flow in the pseudo-logarithmic plane can be performed conveniently on specially scaled graph paper. One Cartesian coordinate axis is taken as the  $\theta$ -axis, the other as the  $M$ -axis. In addition to the values of  $M$ , scales showing the corresponding values of  $\lambda(M)$  and  $q/a_0$  should be indicated. Such scales may be prepared once and for all, for each given value of  $k$  (see diagrams Ia and Ib<sup>150</sup>).



where these scales are drawn for  $k = -0.5$  and  $k = 1.4$ ). The values found for  $Im g^{(n)}$  are entered on this paper, and the lines

$$Im g^{(n)} (\lambda - i \theta) = \text{constant}, \quad (11.1.13)$$

are drawn. In this way there are obtained by graphical interpolation the values of the functions

$$T_n (M, \theta) = Im \{g^{(n)} [\lambda (M) - i \theta]\}. \quad (11.1.14)$$

The function  $\psi (M, \theta)$  is determined by formula (1.9.16). In applying this formula, it is necessary to choose a definite value for the arbitrary constant  $\alpha$ . In general, it is possible to choose  $\alpha$  so that the terms in the series (1.9.16) become small for large value of  $M$ . In<sup>150</sup>  $\alpha$  was set equal to 0.1.

In order to obtain the function  $\psi (M, \theta)$  it is necessary to evaluate the products

$$1/2 Q^{(1)} (M) T_1 (M, \theta), (3/4) Q^{(2)} (M) T_2 (M, \theta), \dots \quad (11.1.15)$$

The values of the functions  $Q^{(n)} (M)$  can be tabulated once and for all (for a given value of  $k$ ). The above products can be evaluated graphically, say, by means of a simple nomogram (see figure 4<sup>148</sup>). Adding a finite number of the terms in the series (1.9.2a) and multiplying by  $H (M)$  (which function may be tabulated once and for all, see tables Ia, Ib, in<sup>150</sup>) gives an approximate expression for  $\psi (M, \theta)$ . Finally, the lines  $\psi (M, \theta) = \text{constant}$  (streamlines) may be drawn. In<sup>150</sup> one can find the lines  $\psi (M, \theta) = \text{constant}$ , computed for the function (11.1.1) and for  $k = -0.5$  and  $k = 1.4$ . For  $k = -0.5$  the series has been replaced by

$$\begin{aligned} \psi_1 (M, \theta) &\equiv \psi (M, \theta; -0.5) = Im \{H (2 \lambda - 0.2) \cdot \\ &\cdot [T_0 (M, \theta) + (1/2) Q^{(1)} (2 \lambda - 0.2) T_1 (M, \theta)]\}, \end{aligned} \quad (11.1.16)$$

with  $\lambda = \lambda (M)$ .

For  $k = 1.4$ , the series has been replaced by

$$\begin{aligned} \psi_2 (M, \theta) &\equiv \psi (M, \theta; 1.4) = Im \{H (2 \lambda - 0.2) [T_0 (M, \theta) + \\ &+ (1/2) Q^{(1)} (2 \lambda - 0.2) T_1 (M, \theta) + (3/4) Q^{(2)} \cdot (2 \lambda - 0.2) T_2 (M, \theta)]\}, \end{aligned} \quad (11.1.17)$$

again with  $\lambda = \lambda (M)$ .

### Step III

The flow is first transferred from the pseudo-logarithmic plane to the hodograph plane. This may be done by using (for the hodograph plane) polar coordinate graph paper. The polar coordinates in the hodograph plane are  $q/a_0$  and  $\theta$ . Since the values of  $q/a_0$  and  $\theta$  are known, the transition usually presents no difficulties (see figure 8 and 9 in<sup>150</sup>). In order to obtain the streamlines in the physical plane it is necessary to compute the integrals (1.9.18a) and (1.9.18b) along the streamlines in the hodograph plane.

The partial derivatives of  $\psi$  entering in the integrands of (1.9.18) can be expressed as follows:

$$\psi_q = R^{(0)} Im g_{\bar{z}} + R^{(1)} Im g + (1/2) R^{(2)} Im g^{(1)} + (3/4) R^{(3)} Im g^{(2)} + \dots, \quad (11.1.18)$$

where

$$R^{(0)} = H \frac{d\lambda}{dq}, \quad R^{(1)} = H_q + (1/2) H Q^{(1)} \frac{d\lambda}{dq}, \dots, \quad (11.1.19)$$

$$\begin{aligned} R^{(n)} &= \left[ \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} (n-1)!} (H Q^{(n-1)})_{\lambda} + \frac{2n(2n-1)}{4n} H Q^{(n)} \right] \frac{d\lambda}{dq}, \\ n &= 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (11.1.20)$$

and

$$\psi_{\theta} = H [Re g_{\bar{z}} + (1/2) Q^{(1)} Re g + (3/4) Q^{(2)} Re g^{(1)} + (15/8) Q^{(3)} Re g^{(2)} + \dots]. \quad (11.1.21)$$

For the case under consideration the values of  $R^{(0)}, \dots, R^{(4)}$  for  $k = -1.4$  are given in table I of <sup>150</sup>.

The integration is to be performed graphically. When a number of streamlines in the physical plane are drawn, a rather complete picture of the flow is obtained. In fact, for each point in the physical plane for which the corresponding point in the hodograph plane is known, the values of the speed, pressure, local Mach number, and so forth, also are known.

For the function (11.1.1) it happens that a part of the streamline  $\psi = 0$  forms a closed contour. The streamline starts at  $-\infty$  and divides itself into two branches at the first stagnation point. The two parts come together at the second stagnation point. Thus, a flow around an obstacle has been obtained. The boundary of the obstacle for  $k = -0.5$  resembles a rhombus possessing curved lines as its four sides and rounded corners.

## 2. Use of punch-card machines

### Step I

A method using the punch-card machines applied to the function (11.1.1) will be briefly outlined following<sup>149</sup>. The above function possesses singularities (branch points of the second order) at the points

$$\bar{Z} = -\log 2 + i\kappa\pi, \quad \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.2.1)$$

only. By classical results in the theory of functions,  $g(\bar{Z})$  can be expanded in series in powers of  $\bar{z}^{1/2}$ ,

$$\bar{z} = \bar{Z} + \log 2, \quad (11.2.2)$$

which series will converge for  $|\bar{z}| < \pi$  and therefore will represent  $g$  in a large part of the domain,  $D_1 + D_2$ , which is of interest. Namely, the domain  $D$  in the  $(\lambda, \theta)$ -plane, in which the function  $g(\bar{Z})$  is to be considered, can be divided into two distinct parts  $D_1$  and  $D_2$ , defined as the subdomains in which  $\lambda_0 < \lambda < 0$  and  $\lambda < \lambda_0$ , respectively. The number  $\lambda_0$  is a preassigned number which can be altered to suit the case, although, in general, it will lie somewhere between  $\lambda = -0.4$  and  $\lambda = -0.1$ , corresponding to local Mach numbers  $M = 0.65$  and  $M = 0.85$ , respectively. The choice of  $\lambda_0$  will depend upon the conditions in each case; for the

Table 11.1. Coefficients  $A_{n,m}$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	— 0.50000	0.625000	0.119797	0.024741	0.003871	0.004286
— 1	0.25000	0.312500	0.179695	0.061852	0.013548	0.019287
1	— 1.	0.416667	0.047919	0.007069	0.000860	
2	— 0.66660	0.166667	0.013691	0.001571	0.000156	
3	— 0.26667	0.047619	0.003042	0.000286	0.000024	
4	— 0.076190	0.010582	0.000553	0.000044	0.000003	

Table 11.2. Coefficients  $C_{n,m}$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
1	0.5708	0.	0	0	0	0
2	— 0.0817	0.5708	0	0	0	0
3	0.0124	— 0.0817	0.2854	0	0	0
4	— 0.0016	0.0124	— 0.0409	0.0951	0	0



most part,  $\lambda_0$  must be larger than the maximal  $\lambda$ -coordinate of the regular points of  $g(\bar{Z})$  in  $D$ . We note that in the example under consideration,  $\psi$  is determined not merely in  $D_2$ , but also in  $D_1$ , by the method described in the present section. A formal computation yields:

$$g \equiv g^{(0)} = (1/2) [(1 - \exp \mathfrak{z})^{1/2} + (1 - \exp \mathfrak{z})^{-1/2}] = i \sum_{n=0}^{\infty} A_{0,n} \mathfrak{z}^{n-1/2}, \quad (11.2.3)$$

$$g^{(-1)} = \frac{dg^{(0)}}{d\bar{Z}} = \frac{dg^{(0)}}{d\mathfrak{z}} = i \sum_{n=0}^{\infty} A_{-1,n} \mathfrak{z}^{n-3/2}, \quad (11.2.4)$$

$$g^{(n)} = i \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,m} \mathfrak{z}^{n+m-1/2} \right] + i \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m} \mathfrak{z}^m. \quad (11.2.5)$$

The values of  $A_{n,m}$  and  $C_{n,m}$  are given in tables 11.1 and 11.2, respectively.

By writing

$$g^{(n)} = S^{(n)} + i T^{(n)}, \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (11.2.6)$$

there is obtained

$$S^{(n)} = - \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \varrho^{n+m-1/2} \sin [(n+m-1/2)\varphi] - \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m} \varrho^m \sin m\varphi, \quad (11.2.7)$$

$$T^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \varrho^{n+m-1/2} \cos [(n+m-1/2)\varphi] + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m} \varrho^m \cos m\varphi, \quad (11.2.8)$$

where

$$\mathfrak{z} = \varrho \exp (i\varphi). \quad (11.2.9)$$

The evaluation of the  $S^{(n)}$  and  $T^{(n)}$  on a punch card machine proceeds as follows:

The values of  $\varrho^{k/2}$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $\varrho^{1/2} = 0.1, 0.2, \dots$ , of  $\cos (k\varphi/2)$ , and of  $\sin (k\varphi/2)$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \mu$ ,  $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, \dots, 330^\circ$ , can easily be computed (see tables 7 and 8 in <sup>149</sup>) and entered on three sets of punch cards  $A, B, C$ , respectively. By using set  $A$ , two new sets,  $D$  and  $E$  are then prepared. On every punch card of the set  $D$ , the values of  $A_{n,m}^+ \varrho^{n+m-1/2}$  and of  $C_{n,m}^+ \varrho^m$  for a fixed  $n$  and fixed  $\varrho$  are entered, say,  $A_{n,0}^+ \varrho^{n-1/2}$  are punched in columns 1 to 6,  $A_{n,1}^+ \varrho^{n+1/2}$  in columns 7 to 12,  $A_{n,2}^+ \varrho^{n+3/2}$  in columns 13 to 18, and so forth. Here  $A_{n,m}^+$  denotes  $A_{n,m}$  if  $A_{n,m}$  is positive, and 0 if  $A_{n,m}$  is zero or negative;  $C_{n,m}^+$  has an analogous meaning. In a similar manner the values of  $A_{n,m}^- \varrho^{n+m-1/2}$  and of  $C_{n,m}^- \varrho^m$  are entered on the cards of set  $E$ . Again  $A_{n,m}^- = 0$  if  $A_{n,m} > 0$ , and equals  $-A_{n,m}$  if  $A_{n,m} \leq 0$ ; the same holds for  $C_{n,m}^-$ . By using the sets  $C$  and  $D$

$$\sum_{m=0}^{\mu} A_{n,m}^+ \varrho^{n+m-1/2} \sin [(n+m-1/2)\varphi] + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m}^+ \varrho^m \sin m\varphi, \quad (11.2.10)$$

is evaluated, and by using the sets  $C$  and  $E$  there may be computed

$$\sum_{m=0}^{\mu} A_{n,m}^- \varrho^{n+m-1/2} \sin [(n+m-1/2)\varphi] + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m}^- \varrho^m \sin m\varphi. \quad (11.2.11)$$

By subtracting (11.2.10) from (11.2.11)  $S^{(n)}$  (11.2.7) is obtained. Similarly,  $T^{(n)}$  can be determined. By interpolation, the values of  $S^{(n)}(\lambda, \theta)$  and  $T^{(n)}(\lambda, \theta)$  may be determined at intermediate points. Note that  $\varrho \exp (i\varphi) = (\lambda - i\theta) + \log 2$ , which yields the relation between  $(\varrho, \varphi)$  and  $(\lambda, \theta)$ . Alternately, the expressions (11.2.7) and (11.2.8) may be evaluated by adding on cards of the sets  $B$  and  $C$  an extra column, say, column 7, in which nothing is punched if the corresponding sine or cosine is positive and say, 1 is punched if it is negative. In columns 1 to 6 the absolute value of the sine or cosine is entered.

Analogously, on cards of the set  $D$  an additional column is provided in which 1 or nothing is punched according to the sign of  $A_{n,m}$  or  $C_{n,m}$ .

### Step II

The second stage of the method is then to obtain the values of the stream function and its derivatives in the  $(\lambda, \theta)$ -plane—that is, to evaluate the expressions

$$\psi(\lambda, \theta) = L^{(0)}(2\lambda) T^{(0)}(\lambda, \theta) + L^{(1)}(2\lambda) T^{(1)}(\lambda, \theta) + \dots + L^{(n)}(2\lambda) T^{(n)}(\lambda, \theta) + \dots, \quad (11.2.12)$$

$$L^{(0)}(2\lambda) = H(2\lambda), \quad (11.2.12a)$$

$$L^{(1)}(2\lambda) = (1/2) H(2\lambda) Q^{(1)}(2\lambda), \dots, \quad (11.2.12b)$$

$$L^{(n)}(2\lambda) = \frac{(2n)!}{2^n n!} H(2\lambda) Q^{(n)}(2\lambda), \quad (11.2.12c)$$

$$\psi_\lambda(\lambda, \theta) = R^{(0)}(2\lambda) \operatorname{Im} g_{\bar{z}} + R^{(1)}(2\lambda) T^{(0)}(\lambda, \theta) + \dots + R^{(n)}(2\lambda) T^{(n-1)}(\lambda, \theta) + \dots, \quad (11.2.13)$$

$$\psi_\theta(\lambda, \theta) = L^{(0)}(2\lambda) \operatorname{Re} g_{\bar{z}} + L^{(1)}(2\lambda) S^{(0)}(\lambda, \theta) + \dots + L^{(n)}(2\lambda) S^{(n-1)}(\lambda, \theta) + \dots \quad (11.2.14)$$

Since the  $L^{(s)}(2\lambda)$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  are independent of  $g$ , they can be entered on master cards once and for all, for different values of  $s$  and different values of  $\lambda$ . For instance, on master card No. 1 in columns 1 to 6, the value of  $L^{(0)}(2\lambda)$  for a fixed value of  $\lambda$ , say  $\lambda_0$ , is entered, while nothing is punched in column 7 if  $L^{(0)}$  is positive; in columns 8 to 14 the absolute value of  $L^{(1)}(2\lambda)$  is entered, and in column 15 the number 1 is punched, if  $L^{(1)}$  is negative, and so forth. Similarly, on master card No. 2 the corresponding values of  $L^{(s)}(2\lambda^{(1)})$  are punched, and so forth.

From previous computations the values of  $T^{(\kappa)}(\lambda, \theta)$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$  for  $\lambda = \lambda^{(0)}$  and  $\theta = \theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ , and so forth, for  $\lambda = \lambda^{(1)}$ ,  $\theta = \theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ , and so forth, are obtained; both sets of cards, that is, the  $L^{(s)}$  and  $T^{(s)}$  are then put into the multiplier, which then yields the values of  $\psi(\lambda, \theta)$  for the set of points  $(\lambda^{(0)}, \theta^{(0)})$ ,  $(\lambda^{(0)}, \theta^{(1)})$ ,  $(\lambda^{(1)}, \theta^{(0)})$ ,  $(\lambda^{(1)}, \theta^{(1)})$ ,  $(\lambda^{(2)}, \theta^{(0)})$ ,  $(\lambda^{(2)}, \theta^{(1)})$ ,  $(\lambda^{(2)}, \theta^{(2)})$ ,  $(\lambda^{(3)}, \theta^{(0)})$ ,  $(\lambda^{(3)}, \theta^{(1)})$ ,  $(\lambda^{(3)}, \theta^{(2)})$ ,  $(\lambda^{(3)}, \theta^{(3)})$ ,  $(\lambda^{(4)}, \theta^{(0)})$ ,  $(\lambda^{(4)}, \theta^{(1)})$ ,  $(\lambda^{(4)}, \theta^{(2)})$ ,  $(\lambda^{(4)}, \theta^{(3)})$ ,  $(\lambda^{(4)}, \theta^{(4)})$ . And  $\psi_\lambda$  and  $\psi_\theta$  may be obtained in similar fashion. The values of  $\psi$ ,  $\psi_\lambda$ ,  $\psi_\theta$  obtained for the case under consideration are given in <sup>149</sup>, Tables 11 and 12.

Now, the values of  $\psi(\lambda^{(0)}, \theta^{(\kappa)})$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\psi_\lambda(\lambda^{(0)}, \theta^{(\kappa)})$ ,  $\psi_\theta(\lambda^{(0)}, \theta^{(\kappa)})$ , may be plotted on graph paper along the abscissa of which the values of  $\theta$  are given. By using this diagram, the values of  $\theta$  can be determined for  $\psi(\lambda^{(0)}, \theta) = \text{constant}$ , say, 0,  $\pm 0.1$ ,  $\pm 0.2$ , and so forth. The values of  $\psi_\lambda(\lambda^{(0)}, \theta)$  and of  $\psi_\theta(\lambda^{(0)}, \theta)$  corresponding to  $\psi(\lambda^{(0)}, \theta) = \text{constant}$  may then be determined. This procedure is then repeated for different values of  $\lambda$ .

### Step III

To every value  $\lambda^{(\kappa)}$ ,  $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ , the values of  $\theta^{(\kappa\tau)}$  are determined for which

$$\psi(\lambda^{(\kappa)}, \theta^{(\kappa\tau)}) = \tau = \text{constant}, \quad (11.2.15)$$

as well as the corresponding values of  $\psi_\lambda(\lambda, \theta)$  and  $\psi_\theta(\lambda, \theta)$ . Tables (or figures) of  $q^2$ ,  $1 - M^2$ ,  $(\rho q^2)^{-1}$ ,  $d\lambda/dq$ , can be prepared, which, since these quantities are functions of  $\lambda$  alone have to be computed only once. The image of a streamline (11.2.15) in the physical plane is given by the integrals (1.9.18a) and (1.9.18b) taken along the



streamline in the hodograph plane. The integrals (1.9.18a) and (1.9.18b) should be approximated by the sums

$$x = x(q_{(l)}) = \sum_{s=0}^{s=l} \Delta x_s(\tau), \quad (11.2.16a)$$

$$y = y(q_{(l)}) = \sum_{s=0}^{s=l} \Delta y_s(\tau), \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (11.2.16b)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_s &= \varrho_0 (\varrho_s q_s^2)^{-1} [\psi_{\theta^{(s\tau)}}^2 (1 - M_s^2) + \\ &+ q_s^2 \psi_q^{(s\tau)^2} \cos \theta^{(s\tau)} [\psi_{\theta^{(s\tau)}}]^{-1} \Delta q_s, \end{aligned} \quad (11.2.17a)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_s &= \varrho_0 (\varrho_s q_s^2)^{-1} [\psi_{\theta^{(s\tau)}}^2 (1 - M_s^2) + \\ &+ q_s^2 \psi_q^{(s\tau)^2} \sin \theta^{(s\tau)} [\psi_{\theta^{(s\tau)}}]^{-1} \Delta q_s, \end{aligned} \quad (11.2.17b)$$

$$\Delta q_s = q_{s+1} - q_s. \quad (11.2.17c)$$

By using tables for squares and the reciprocal, the values of  $\psi_{\theta^{(s\tau)}}^2$ ,  $\psi_q^{(s\tau)^2}$  and  $[\psi_{\theta^{(s\tau)}}]^{-1}$  may be determined, together with the previously described tables for  $(\varrho q^2)^{-1}$ ,  $1 - M^2$ , and so forth. The quantity

$$\varrho_0 (\varrho_s q_s^2)^{-1} [\psi_{\theta^{(s\tau)}}^2 (1 - M_s^2) + q_s^2 \psi_q^{(s\tau)^2} [\psi_{\theta^{(s\tau)}}]^{-1} \Delta q_s, \quad (11.2.18)$$

is determined with the use of punch cards. The expression (11.2.18) is then multiplied by  $\cos \theta^{(s\tau)}$  and  $\sin \theta^{(s\tau)}$  to yield the first and second terms of equations (11.2.17), respectively.

Since the sine and cosine may vary in sign, an extra column must be provided with each term of the product. The cards are put in the multiplier which is set for progressive totaling the values (11.2.16), which correspond to (11.2.15) then resulting.

### 3. Flow past an oval-shaped obstacle

This type of flow is treated in<sup>160</sup>. Let there be given a circle  $|z| = R$ , and suppose that it is desired to determine the symmetric flow past this obstacle having velocity  $(1/2) U$  at infinity, where  $U$  is a positive real number. Then it is easily proven that the so-called "complex potential"  $w = \Phi + i\psi$  of the flow is given by:

$$w = \Phi + i\psi = (1/2) U (z + R^2/z), \quad (11.3.1)$$

where, as usual,  $\Phi$  and  $\psi$  are the potential and stream-functions, respectively, and  $dw/dz$  is the conjugate of the velocity vector (not the velocity vector itself). Now consider the mapping:

$$\zeta = (1/2) (z + z^{-1}). \quad (11.3.2)$$

If, as we shall assume,  $R > 1$ , this mapping transforms the exterior of the aforementioned circle into the exterior of the ellipse. We note that the thickness ratio of the ellipse is equal to  $(R^2 - 1)/(R^2 + 1)$ . It is easy to show that if (11.3.2) is solved for  $z$  as function of  $\zeta$ , and if this substitution is performed in (11.3.1), then  $w = \Phi + i\psi$  yields a symmetric flow past the ellipse with velocity  $U$  (not  $(1/2) U$ , as previously) at infinity. Furthermore, setting  $dw/d\zeta = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \bar{q}$  (i. e., the conjugate of the velocity vector), we can easily show that  $w$  may be expressed as a function of  $q$  in the following manner:

$$w = (1/2) U \left[ \left( \frac{\bar{q} - R^2 U}{\bar{q} - U} \right)^{1/2} + R^2 \left( \frac{\bar{q} - U}{\bar{q} - R^2 U} \right)^{1/2} \right]. \quad (11.3.3)$$

<sup>160</sup> S. Bergman and B. Epstein: Determination of a compressible fluid flow past an oval-shaped obstacle. J. Math. Physics 26, 195—222 (1948).

Finally, if we set  $\bar{q} = \exp \bar{Z}^+$ ,  $\bar{Z}^+ = \lambda^+ - i\theta$ , we obtain the following expression for the complex potential in the plane of the complex variable  $\bar{Z}^+$  (logarithmic plane):

$$w = g^{[0]}(\bar{Z}^+) - (1/2) U \left[ \left( \frac{\exp \bar{Z}^+ - R^2 U}{\exp \bar{Z}^+ - U} \right)^{1/2} + R^2 \left( \frac{\exp \bar{Z}^+ - U}{\exp \bar{Z}^+ - R^2 U} \right)^{1/2} \right]. \quad (11.3.4)$$

There are two parameters in the flow, namely  $U$ , the speed at infinity, and  $R^2$ , which determines the thickness ratio the ellipse. We have chosen  $R^2 = 1.2$ , corresponding to a thickness ratio of 1/11, while  $U$  was chosen equal to 0.765; the value of  $\lambda$  at infinity for the compressible flow  $\psi = H \psi^*$ ,  $\psi^*$  being given by (1.9.2), determined by applying the integral operator to the function  $g^{[0]}(\bar{Z})$  given by (11.3.4), will therefore be equal to  $\alpha = \log(0.765) = -0.26785$ , corresponding to Mach number 0.6. It should be stressed that the flow of the compressible fluid is situated on a two-sheeted Riemann surface whose two sheets corresponding to the upper and lower halves of the physical plane, respectively, are connected along the interval  $-\infty < \lambda^+ < \alpha$ ,  $\theta = 0$ . The point  $\bar{Z}^+ = \alpha$  is seen to be a branch point of  $g^{[0]}(\bar{Z})$ .

The function  $g^{[0]}(\bar{Z})$  was evaluated for a number of values of  $\bar{Z}$  lying within and slightly outside the streamline  $\psi = 0$ , (see Table IV.0 in <sup>160</sup>). Then the function

$$g^{[1]}(\bar{Z}) = \int_{\alpha}^{\bar{Z}} g^{[0]}(\bar{Z}') d\bar{Z}', \quad \bar{Z}' = \lambda' - i\theta, \quad (11.3.5)$$

which can also be expressed in terms of elementary functions, was evaluated for the same set of values of  $\bar{Z}$  (see Table IV.1 in <sup>160</sup>). We have namely:

$$g^{[1]}(\bar{Z}) = (1/2) U (1 + R^2) \lg \{ [1 + R^2 - 2 \exp(\bar{Z} - \alpha) - 2S] / [R^2 - 1] \} + \\ + U R \lg \{ [2RS + 2R^2 - (1 + R^2) \cdot \exp(\bar{Z} - \alpha)] / [R^2 - 1] \} - RU(\bar{Z} - \alpha), \quad (11.3.6)$$

where

$$S^2 = \exp[2(\bar{Z} - \alpha)] - (1 + R^2) \exp(\bar{Z} - \alpha) + R^2. \quad (11.3.6a)$$

The functions  $g^{[2]}(\bar{Z})$ ,  $g^{[3]}(\bar{Z})$ ,  $g^{[4]}(\bar{Z})$ , which are defined by the recursion formula:

$$g^{[n+1]}(\bar{Z}) = \int_{\alpha}^{\bar{Z}} g^{[n]}(\bar{Z}') d\bar{Z}', \quad (11.3.7)$$

were also evaluated for the same set of values of  $\bar{Z}$ . However, since it was not possible to express the functions in closed form, a graphical method was employed to evaluate them. The values of  $g^{[n+1]}(\bar{Z})$  were determined in the following manner: The point  $\bar{Z}$  was joined to the point  $\alpha$  by a polygonal path consisting of a vertical segment from  $\bar{Z}$  to the  $\lambda$ -axis and a horizontal segment to the point  $\alpha$ . The complex integration (11.3.7) was thus reduced to two real integrations, for on the vertical portion,  $d\bar{Z}' = i d\theta'$ , while on the horizontal portion,  $d\bar{Z}' = d\lambda'$ . The integrals were estimated by plotting curves on graph paper and counting squares. In this manner the functions  $g^{[2]}$ ,  $g^{[3]}$ ,  $g^{[4]}$ , successively were determined (see Tables IV.2-IV.4 in <sup>160</sup>). Next for each of the values of  $Z$  under consideration the corresponding values of  $H(2\lambda)$ ,  $Q^{(n)}(2\lambda)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , were determined (see Table V in <sup>160</sup>). Then the imaginary part of the series (1.9.2) multiplied by  $H$  (1.9.7) which yields the stream-function of a compressible flow (at least in a certain domain of convergence) was approximated by taking the first four terms of the indicated summation. The stream-function given by (1.9.2) does not yield a flow past the same obstacle as in the incompressible case, but rather past a more or less distorted obstacle. In this manner the approximate



values for the stream-function were obtained (see Table VI in <sup>160</sup>). Finally, by using formulas (1.8.1) for the transition to the physical plane, the form of the obstacle and the streamlines may be determined approximately (see Tables VII.1, VII.2, in <sup>160</sup>). The point corresponding to  $q = 0.4571$ ,  $\theta = 0.348$  on the zero streamline was arbitrarily chosen as the origin of the physical plane. The position of the image of the point  $q = 0.4571$ ,  $\theta = 0.237$  (on the streamline 0.01) was then determined by using formula (1.8.1) along the line  $q = 0.4571$ . Then the images of the other points on the streamline  $\psi = 0.01$  were determined by performing the integrations indicated in (1.8.1) along the streamline.

#### 4. Transonic flow

As an illustration of the theory presented in section 4.9, an example is briefly outlined below<sup>155</sup>.

The complex potential of an incompressible flow around a circle is given in the physical plane ( $t$ -plane) by the relation

$$w = \Phi + i\psi = q_0(t + R/t^2), \quad (11.4.1)$$

where  $q_0$  is the dimensionless speed at infinity. The function

$$\xi = (1/2)(t + 1/t), \quad (11.4.2)$$

maps the exterior of the circle onto the exterior of the ellipse and therefore the function  $g(\xi) = w[(t(\xi))]$  will represent the complex potential of an incompressible flow around an ellipse in the physical plane. This potential, when transformed to the hodograph plane will furnish, upon expansion about  $\eta_0 = \log q_0$ , a set of  $\{b_v\}$  for the incompressible case, which, as a first approximation will also be used for the compressible flow. This transformation is carried out as follows: The conjugate to the velocity vector  $\bar{q}$  is given by

$$\bar{q} = dw/d\xi = (dw/dt)/(d\xi/dt), \quad (11.4.3)$$

or

$$\bar{q} = [(1/2)q_0(1 - R^2/t^2)]/[(1/2)q_0(1 - 1/t^2)], \quad (11.4.3a)$$

or

$$t^2 = (\bar{q} - q_0 R^2)/(\bar{q} - q_0). \quad (11.4.3b)$$

Therefore:

$$w\{\xi[t(\bar{q})]\} = (1/2)q_0\{[(\bar{q} - q_0 R^2)/(\bar{q} - q_0)]^{1/2} + R^2[(\bar{q} - q_0)/(\bar{q} - q_0 R^2)]^{1/2}\}. \quad (11.4.4)$$

Since the complex potential in the logarithmic plane is needed,  $\bar{z}$  is set  $= \bar{\eta} - i\theta$ ,

with  $\bar{\eta} = \int \frac{\bar{q}}{d\bar{q}} = \log \bar{q}$  and  $\eta_0 = \log q_0$ . Thus is obtained

$$\bar{q}(\bar{z}) = (1/2) Re(\exp \eta_0) \{ (A B^{-1})^{1/2} + (B A^{-1})^{1/2} \}, \quad (11.4.5)$$

$$A = [1 - R^{-2} \exp(\bar{z} - \eta_0)], \quad (11.4.5a)$$

$$B = [1 - \exp(\bar{z} - \eta_0)], \quad (11.4.5b)$$

which can be developed in a power series of the form

$$g(\bar{z}) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v (\bar{z} - \eta_0) v^{-1/2}. \quad (11.4.6)$$

As an example, let us take  $q_0 = 0.98$  (or  $\eta_0 = -0.02$ ) and  $R^2 = 1.2$ , which yields a thickness ratio for the elliptic profile 1:11. With these numerical values the set of  $\{b_v\}$  listed in Table 11.4.1 is obtained.

Table 11.4.1. The Series Coefficients of Function  $g$ 

$\nu$	0	1	2	3	4	5
$b_\nu$	0.24010 $i$	— 2.10086 $i$	— 4.85941 $i$	— 8.17015 $i$	— 82.86923 $i$	— 389.55 $i$

It is observed that the radius of convergence of this series is  $|\zeta - \eta_0| = \log R^2 = 0.18$  about the center  $\zeta = \eta_0$ . As was mentioned in previous sections, however, by employing suitable summation methods, the series may be used outside its domain of convergence.

Using these values for  $\{b_\nu\}$  and the table of  $\{\psi^{(\nu)}\}$  (see section 4.9) yields the expression

$$\psi = \sum i b_\nu \psi^{(\nu)}(\eta, \theta; -0.02), \quad (11.4.7)$$

which is equated to zero. If this is solved by a graphical method, a number of points are obtained on the streamline

$$\psi(\eta, \theta; -0.02) = 0, \quad (11.4.8)$$

which are given in Table 11.4.2.

Table 11.4.2. Points on Streamline  $\psi(\eta, \theta; -0.02) = 0$ 

$\eta$	0.032	0.029	0.025	0.014	0.	— 0.014
$\theta$	0	0.08	0.124	0.151	0.170	0.190

The next task is to obtain the image of this streamline in the physical plane. To do this the values of  $\{X^{(\nu)}\}$  and  $\{Y^{(\nu)}\}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, 5$ , (4.9.22) may be found corresponding to the set  $(\eta, \theta)$ . By forming the expressions

$$x = \sum i b_\nu X^{(\nu)}(\eta, \theta; -0.02), \quad (11.4.9a)$$

$$y = \sum i b_\nu Y^{(\nu)}(\eta, \theta; -0.02), \quad (11.4.9b)$$

see, (4.9.21), a set of points may be obtained lying on the streamline  $\psi = 0$  in the physical plane (see Table VIII in <sup>155</sup>).

## Part XII

### Errata in Previous Papers

A few errors and misprints were found here and there in previous papers. They will be corrected below, the numbers in brackets referring to the list of references at the end of the book.

Page	Equation	Should read
148		
48	(129)	$\beta \equiv \theta_0$ .
66	second (175)	$\frac{\pi^2 \nu^3 b_\nu}{4 L^2} = 0$ .
149		
37	(43)	$F(2\lambda) = \frac{1}{64} (k+1) [\dots]$ ,
49	(74)	$\leq \frac{c(k+1)!}{\beta^{k+2}}$ .

<sup>153</sup> Appendix III, p. 61: A more correct representation of the proof of a fundamental theorem on supersonic flows is given in N. A. C. A., T. N. No. 1875, Appendix B, pp. 27—31.

The whole proof in Appendix III, pp. 61—70, should be derived for  $E^{(n)}(2A) = E^{(n)}(\tau)$ , and not for  $E^{(n)}(A)$ . The formulas given on pp. 68, 69 and 70 should refer to  $\underline{E}^{(n)}(2A) = \underline{E}^{(n)}(\tau)$  and not  $\underline{E}^{(n)}(A)$ .



Page	Equation	Should read
153		
67	(156)	$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} - \frac{a}{2},$
67	Figure 10 is incorrect	Figure 3, Bergman, N. A. C. A., No. 1875.
69	Above (168)	$\mathcal{A} = \frac{a}{2}.$
154		
17	(19)	$+ \int_{\eta_0}^{\eta} h_Y(Y) \dots + \int_{\dot{\delta}_0}^{\dot{\delta}} g_X(X) \dots,$
21	below (31)	$F_2 [2 \mathcal{A} - \pi (\hbar^{-1} - 1)] = \dots,$
25	(41)	$\int_{\eta_0}^{\eta} dY \int_{\dot{\delta}_0}^{\dot{\delta}} F_1(X + Y) dX = \dots,$
29	(60)	$\dots + \tilde{H}^{(n+1)}(\tau),$
29	(61)	$0 \ll \tilde{H}^{(n+1)}(\tau),$
29	(64)	$\frac{M}{(\tau_0 - \varepsilon - \tau)^2},$
30	(67)	$\tilde{E}^{(n+1)}(\tau) = C_n M \tau_0^2 \int_a^{\tau} \cdot \left[ \frac{n(n+1) + M}{(\tau_0 - \varepsilon - \tau)^{n+2}} \right] d\tau +$ $+ \frac{C_{n+1} M \tau_0^2}{(\tau_0 - \varepsilon - a)^{n+1}} = \frac{C_{n+1} M \tau_0^2}{(\tau_0 - \varepsilon - \tau)^{n+1}},$
30	(68)	$C_{n+1} = C_n \left( n + \frac{M}{(n+1)} \right),$
31	(73)	$V^{(1)}(\xi', \eta') \ll$ $M_2 \left[ 1 + \frac{2! M M^* M_2 \tau_0^2  \xi' }{(\tau_0 - \varepsilon - \tau)} + \dots \right.$ $\left. \frac{(n+1)! M M^* M_2 \tau_0^2  \xi' ^n}{n! (\tau_0 - \varepsilon - \tau)^n} + \dots \right].$
156		
470	(4.5)	$\frac{\bar{q} - \bar{q}_0}{m} + \dots$
471	(4.6)	$\dots + \text{Power series in } (\bar{q} - \bar{q}_0).$
472	Below definition 4.1	$\psi = \arctan [(\theta - \theta_0)/(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0)].$
472	Above (5.1)	$\dots$ of (2.12b) and (2.12a), respectively.
155		
17	footnote	$\dots (1 - M^2)^{1/2} dq,$
18	(12)	$l(\eta) = [2/(k-1)]^{(2-k)/(k+1)} \cdot \{(-2\eta) - [(2k+5)/(2k+2)]\} \dots,$
20	(17)	$S_0 = 2^{(2k+1)/(6k-6)} 3^{-1/6} \dots,$
21	(27b)	$[\dots \sin \theta + \psi_{\eta} \cos \theta] d\eta,$
22	6th line from top	$ X  > 1,$
22	(B)	$\dots - 2c(-\eta)^{3/2} \eta_0 - \eta_0^2 = 0,$
22	(28a)	$\dots (1/6, 5/6, \nu + 1/2, \dots) = F(1/6, 5/6, \nu + 1/2, \dots),$
23	(28b)	$\dots (1/6, 5/6, \nu + 1/2, \dots) = \dots,$
23	below (28b)	$A_{\nu} = \Gamma(-2/3) \cdot \Gamma(\nu + 1/2) / \Gamma\left(-\frac{1}{3} - \nu\right) \Gamma(5/6).$

Page	Equation	Should read
157		
874	(4.14)	$E^+ = (\dots) F(\dots) + b_3 S_0 \dots,$
876	First line from top	$\dots (4.9) \dots,$
876	5th line from bottom	$\dots \text{ of } (2.12),$
882	(5.29)	$\dots s^{(3/2)n} s^v / (\dots) \dots,$
882	(5.30)	$\dots \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \dots$

### Additional Contributions\*

Below the author gives some recent contributions to Chapter VII, "Review of Other Methods".

Henrici<sup>161</sup> (1952) had shown that the Bergmann's integral operator of the first kind can be interpreted as the solution of a certain hyperbolic equation by Riemann's method.

One may mention the papers by Gilbarg<sup>162</sup>, Loewner<sup>163</sup>, Sauer<sup>164</sup>, Longhorn<sup>165</sup>, Bers<sup>166</sup>, Bergman<sup>167</sup>, Manwell<sup>168</sup>, Gilbard and Serrin<sup>169</sup>, and many others.

Diaz and Ludford<sup>170</sup> compare the methods of Bergman and Le Roux<sup>171</sup> for the case of linear hyperbolic equations in two variables. They seem to show that the theorem which is the basis for Bergman's method is a restatement of results of Le Roux. In some applications Le Roux's method may be simpler.

\* Supplement to the galley proofs.

<sup>161</sup> P. Henrici: Bergman's Integraloperator erster Art und Riemannsche Function. ZAMP, III, 3, 228—232 (1952).

<sup>162</sup> D. Gilbarg: Comparison methods in the theory of subsonic flows. J. Rational Mech. Analysis 2, 2, 233—251 (1953).

<sup>163</sup> C. Loewner: Conservation laws in compressible fluid flow and associated mappings, J. Rational Mech. Analysis 2, 3, 537—561 (1953). Some bounds for the critical free stream Mach number of a compressible flow around an obstacle. "Studies in mathematics and mechanics" presented to R. v. Mises by friends, colleagues and pupile, New York, Academic Press. 177—183 (1954).

<sup>164</sup> R. Sauer: Hyperbolic problem in gas dynamics with more than two independent variables (in German). ZAMM 33, 10/11, 331—336 (1953).

<sup>165</sup> A. L. Longhorn: Subsonic compressible flow past bluff bodies. Aero. Quart. 5, 2, 144—162 (1954).

<sup>166</sup> L. Bers: Existence and uniqueness of a subsonic flow past a given profile. Comm. pure appl. math. 7, 3, 441—504 (1954).

<sup>167</sup> S. Bergman: A method for solving boundary value problems of mathematical physics on punch card machines. J. Assn. Comput. Mach. 1, 3, 101—104 (1954). Tables for the determination of fundamental solutions of equations in the theory of compressible fluids. Mathematical tables and other aids to computation. National Acad. Sci., Nation. Res. Council, U. S. A., 9, 49, 8—14 (Jan. 1955).

<sup>168</sup> A. R. Manwell: A new singularity of transonic plane flows. Quart. Appl. Math. 12, 4, 343—349 (1955).

<sup>169</sup> D. Gilbarg and J. Serrin: Uniqueness of axially symmetric subsonic flow past a finite body. J. Rat. Mech. Analysis, 4, 1, 169—175 (1955).

<sup>170</sup> J. B. Diaz and G. S. S. Ludford: On two methods of generating solutions of linear partial differential equations by means of definite integrals. Quart. Appl. Math. 12, 4, 422—427 (1955).

<sup>171</sup> J. Le Roux: Sur les intégrales des linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Ann. Ec. Norm. Sup. (3), 12, 227—316 (1895).



## Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung<sup>1</sup>

Von Max A. Dengler

Northrop Aircraft, Inc., Boundary Layer Research, Los Angeles, U. S. A.

Mit 7 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Gegenstand der Abhandlung ist die theoretische Analyse der Ausbreitung von Biegewellen in elastischen Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. Die Untersuchungen stützen sich auf die Biegetheorie von Timoshenko, indem sie die Einflüsse der Rotationsträgheit und der transversalen Schubdehnung als Näherungen ersten Grades berücksichtigt.

### I. Einleitung

Die klassische Biegetheorie ist nur in bedingtem Maße imstande, Erscheinungen zu beschreiben, die aus der Einwirkung stoß- und schlagartiger Kräfte hervorgehen. Diese Feststellung ist nicht neu. Aus der Gruppe der Autoren, die auf diesen Umstand hingewiesen haben, mögen in diesem Zusammenhang vor allem Lamb<sup>2</sup>, Timoshenko<sup>3, 4</sup>, Fluegge<sup>5</sup> und Mindlin<sup>6</sup> genannt werden. Lamb gelangte als einer der ersten zu dem Schluß, daß die von Kirchhoff begründete klassische oder elementare Biegetheorie zur Bestimmung der Grundschrwingungen eines elastischen Stabes nicht geeignet sein kann. Die tieferen Ursachen dafür, daß die elementare Theorie der mathematischen Analyse stoßartig ablaufender Biegeerscheinungen auch unterhalb der Elastizitätsgrenze nicht entsprechen kann, sind seit längerer Zeit gut bekannt.

Das allgemeine Problem der Biegung eines Stabes ist von Lamb<sup>2</sup> nach den Grundzügen der Elastizitätstheorie berechnet worden. Die Anwendung der Lambschen Theorie führt jedoch schon in verhältnismäßig einfachen Fällen auf beachtliche mathematische Schwierigkeiten. Das Problem erhielt eine glückliche Wendung durch die Biegetheorie von Timoshenko<sup>3, 4</sup>, die unter Beibehaltung einer Reihe von vereinfachenden Annahmen der elementaren Biegetheorie dieselbe an entscheidender Stelle erweitert und verbessert und damit als das Bindeglied zwischen der elementaren Biegetheorie und der exakten elastizitätstheoretischen Behandlung des Problems aufgefaßt werden kann. Die Tatsache, daß die Theorie von Timoshenko es ermöglicht, auch stoßartig ablaufende Biegeerscheinungen mathematisch zu analysieren, ist vor allem dem Umstand zuzuschreiben, daß die Einflüsse der Rotationsträgheit und der transversalen Schubdehnung als Näherungen ersten Grades berücksichtigt werden.

Der für den Stab entwickelte Timoshenko-Biegemechanismus ist von Fluegge<sup>5</sup> weiter erforscht und von Mindlin<sup>6</sup> auf das zweidimensionale Problem ausgedehnt worden. Uflyand<sup>7</sup> scheint der erste Autor zu sein, der sich im Besitz von exakten Lösungen der Timoshenkoschen Biegetheorie befand. Die bedeutende russische

<sup>1</sup> Aus der Dissertation zur Erlangung des Doktorates der technischen Wissenschaften.

<sup>2</sup> H. Lamb: On waves in an elastic plate. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **93** (1917).

<sup>3</sup> S. Timoshenko: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., Ser. 6, **41** (1921).

<sup>4</sup> S. Timoshenko: On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. Phil. Mag., Ser. 6, **43** (1922).

<sup>5</sup> W. Fluegge: Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben. Z. angew. Math. Mechan. **22**, Nr. 6 (1942).

<sup>6</sup> R. D. Mindlin: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J. Appl. Mechan., A. S. M. E. (1950).

<sup>7</sup> S. Uflyand Ya: Die transversalen Schwingungen und Wellen von Stäben und Platten. Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Math. Mechan., Moskau **22** (1948) (in russischer Sprache).

Arbeit ist dem Autor erst nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit bekannt geworden.

Die ersten Ansätze zur theoretischen Lösung des Biegestoßproblems sind bereits in einer früheren Arbeit des Autors mitgeteilt worden<sup>8</sup>. Auch die ersten experimentellen Ergebnisse, die das Schlagproblem des Stabes zum Gegenstand haben, sind unter Mitwirkung des Autors zustande gekommen<sup>9</sup>. Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment darf als zufriedenstellend bezeichnet werden.

Im folgenden soll das Biegestoßproblem etwas näher definiert werden. Soweit es sich um das eindimensionale Problem handelt, wird angenommen, daß der einem konzentrierten seitlichen Stoß ausgesetzte Stab von homogener Beschaffenheit, gleichförmigem Querschnitt und sehr großer Länge ist. Diese letztere Annahme ist gleichbedeutend mit der Festsetzung, daß Reflexionen der beiderseits wegströmenden elastischen Wellen von den beiden Enden nicht berücksichtigt werden sollen. Der Stab möge sich in einem schwerelosen Felde befinden. Er sei zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe. In diesem Augenblick soll ein quergerichteter, zeitlich und räumlich hochkonzentrierter Stoß den Stab treffen. Unter „räumlich konzentriert“ soll verstanden werden, daß nur ein sehr enger Bereich zu beiden Seiten des zentralen Stabquerschnittes von dem Schlag getroffen wird. Die Bezeichnung „zeitlich konzentriert“ soll sich auf die außerordentlich kurze Zeitdauer beziehen, in der die gesamte durch den Stoß übertragene Impulsmenge dem Stab zugeführt wird.

Der hier vorgestellte physikalische Stoß legt die mathematische Idealisierung nahe. Es kann sodann von einer unendlich großen Kraft gesprochen werden, die in unendlich kurzer Zeit auf einen unendlich engen Bereich des Stabes trifft, derart, daß die übertragene Impulsgröße einen bestimmten Wert hat. Es ist naheliegend, den auf solche Weise definierten Grenzwert des physikalischen Stoßes als mathematischen Stoß zu bezeichnen und diesen durch Diracsche Funktionen darzustellen, wie solche in der Quantenmechanik Verwendung finden.

Unter der Einwirkung des transversalen Schlages entstehen elastische Wellen, die sich mit endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten symmetrisch gegen die beiden Stabenden ausbreiten. Eine eingehende Analyse zeigt, daß der Stab an einer Stelle  $x$  tatsächlich eine bestimmte Zeit  $t$  in Ruhe bleibt, und ferner, daß es sich bei der Wellenausbreitung um die Überlagerung zweier Elementarwellen verschiedener Ausbreitungsgeschwindigkeiten handelt. Die eigentliche Biegewelle ist die schnellere Welle, die langsamere ist die Schubspannungswelle. Dieser Sachverhalt folgt aus den Grundlagen der Theorie von Timoshenko<sup>3, 4</sup> und ist von fundamentaler Bedeutung. Bekanntlich ergibt die Kirchhoffsche Biegetheorie im Gegensatz dazu unendliche Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten.

Die Reaktion des Stabes auf plötzlich einsetzende konstante Kraft kann aus der Reaktion auf den mathematischen Stoß abgeleitet werden. Bekanntlich ist die letztere gleich der ersten Ableitung der ersteren. Die Reaktion für den allgemeinen physikalischen Stoß kann ebenfalls leicht aus der Reaktion für den mathematischen Stoß ermittelt werden. Es gelingt dies durch Anwendung des den Duhamelschen Integralsätzen zugrunde liegenden Superpositionsprinzips.

Die Bewegungsgleichungen des Stabes führen auf eine lineare inhomogene partielle Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und gewissen Rand- und Anfangsbedingungen. Die Lösung wird durch Anwendung der Laplace-schen Transformation sowie durch analytische Fortsetzung und Integration in der

<sup>8</sup> M. A. Dengler und M. Goland: Transverse impact of long beams, including rotatory inertia and shear effects. Proc. of the First U. S. Nat. Congr. for Appl. Mechan., Chicago 1951.

<sup>9</sup> M. A. Dengler, M. Goland und P. D. Wickersham: Propagation of elastic impact in beams in bending. J. Appl. Mechan., A. S. M. E. (1954).



komplexen Zahlenebene erzielt. Die Resultate erscheinen in reeller und geschlossener Form und sind exakte Lösungen des zugrunde liegenden Randwertproblems. In der Literatur ist darauf hingewiesen worden, daß es sich hierin um die ersten bekanntgewordenen exakten Lösungen der Timoshenkoschen Biegetheorie handelt<sup>10, 11, 12</sup>, doch ist bereits hervorgehoben worden, daß sich schon Uflyand<sup>7</sup> im Besitz exakter Lösungen befand.

Die exakten Lösungen des Problems wurden nach besonderen Methoden der zahlenmäßigen Auswertung zugeführt und durch Superposition auf den Fall des physikalischen Stoßes erweitert. Um die Gültigkeit der theoretischen Ergebnisse zu überprüfen, wurden vom Autor in Zusammenarbeit mit den Herren Wickersham und Goland<sup>9</sup> experimentelle Untersuchungen in die Wege geleitet, die darin bestanden, daß verschiedene Stahlstäbe durch aufgeschossene Stahlkugeln in Biegeschwingungen versetzt wurden. Wie schon erwähnt, wurde gutes Übereinstimmen zwischen Theorie und Experiment erzielt.

Das zweidimensionale Problem ist dem eindimensionalen analog. Gegenstand der Untersuchung ist eine homogene elastische Platte, die sich in einem schwerelosen Feld befindet und zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe ist.

In diesem Augenblick wird sie von einem transversalen, gegen ihren Mittelpunkt gerichteten mathematischen Stoß getroffen. Von Interesse sind die vom Mittelpunkt wegströmenden elastischen Wellen. Zur Vereinfachung des Problems wird radiale Symmetrie des gesamten Vorganges angenommen. Die Bewegungsgleichung der Platte wird damit eine lineare partielle Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten. Mit Rücksicht auf die Vorteile, die die Laplacesche Transformation in bezug auf die Diracsche Funktion besitzt, wurde sie auch in diesem schwierigeren Fall zur Lösung herangezogen. Die Darstellung der Lösungen gelingt nur durch Zuhilfenahme von Reihenentwicklungen. Es wird angenommen, daß diese mit Rücksicht auf verhältnismäßig günstige Konvergenzeigenschaften der numerischen Auswertung zugänglich wären.

## II. Herleitung der Differentialgleichung für die Ausbreitung von transversalen Wellen in elastischen Stäben. Randbedingungen für stoßweise Beanspruchung

Gegenstand unserer Überlegungen sei ein beiderseits einfach unterstützter elastischer Stab, der sich unter dem Einfluß einer quer nach unten gerichteten Kraft durchbiege. Die longitudinale Stabkoordinate soll mit  $\bar{x}$ , die transversale Auslenkung (Durchbiegung) mit  $\bar{w}$  bezeichnet werden. Die äußere Kraft pro Längeneinheit ist  $\bar{q}$ . Der Einfluß der Schwerkraft sei vernachlässigt. Die links von dem Querschnitt  $\bar{x}$  wirkenden äußeren Kräfte lassen sich auf die in der Querschnittsfläche wirkende, positiv nach oben gerichtete Querkraft  $Q$  und das Kraftmoment  $M$  zurückführen, dessen positiver Sinn einer Drehung der Stabelemente im Uhrzeigersinn entspricht.

Die Annahme, daß ursprünglich ebene Querschnitte auch unter Belastung eben bleiben, soll beibehalten werden. Zum Unterschied gegenüber der elementaren Theorie soll aber nicht nur die reine Drehung, sondern auch die durch die Schubspannungen hervorgerufene Querverschiebung der Elemente berücksichtigt werden. Die Neigung der elastischen Linie (Durchbiegung der neutralen Faser) kann als aus zwei Grundbestandteilen aufgebaut gedacht werden, a) einem Beitrag  $\eta$ , der eine unmittelbare

<sup>10</sup> R. W. Leonard und B. Budiansky: On traveling waves in beams. N. A. C. A. Techn. Note 2874 (1953).

<sup>11</sup> R. A. Andersen: Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory. Trans. Amer. Soc. Mech. Engr. (1953).

<sup>12</sup> J. Miklowitz: Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of bending. Trans. Amer. Soc. Mech. Engr. (1953).

Folge der Drehung der Stabelemente ist, b) einem Beitrag  $\gamma$ , der sich aus der seitlichen Verschiebung der Elemente ergibt. Es ist

$$d\bar{w}(\bar{x})/d\bar{x} = \varphi(\bar{x}) + \gamma(\bar{x}). \quad (1)$$

Gl. (1) gilt in sinngemäßer Erweiterung auch für zeitabhängige Erscheinungen. Ferner gelten auch weiterhin näherungsweise die Beziehungen

$$M(\bar{x}, t) = -EI \cdot \partial\varphi(\bar{x}, t)/\partial\bar{x}, \quad (2)$$

$$Q(\bar{x}, t) = \lambda GF \cdot \gamma(\bar{x}, t). \quad (3)$$

Darin bedeutet  $F$  den Flächeninhalt und  $I$  das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche,  $E$  und  $G$  den Elastizitäts- und Gleitmodul,  $\lambda$  schließlich eine von der Querschnittsform abhängige Konstante, nach Timoshenko<sup>3, 4</sup> das Verhältnis von durchschnittlicher zu maximaler Schubspannung eines Querschnittes.  $\lambda G$  wird als wirk-samer Gleitmodul bezeichnet. Aus Gl. (1), (2) und (3) folgt zunächst

$$Q(\bar{x}, t) = \lambda GF \{ \partial\bar{w}(\bar{x}, t)/\partial\bar{x} - \varphi(\bar{x}, t) \}. \quad (4)$$

Wird die Rotationsträgheit der Elemente einbezogen, die Massendichte mit  $\varrho$  bezeichnet und zur Vereinfachung die Lagrangesche Schreibweise verwendet, gelten für das Gleichgewicht der Kräfte und Momente die Bewegungsgleichungen

$$Q_{\bar{x}} + \bar{q} = \varrho F \cdot \bar{w}_{tt}, \quad (5)$$

$$Q - M_{\bar{x}} = \varrho I \cdot \varphi_{tt}. \quad (6)$$

Unter Verwendung von Gl. (2) und (4) nehmen die Gl. (5) und (6) die Gestalt an

$$\lambda GF \{ \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} - \varphi_{\bar{x}} \} + \bar{q} = \varrho F \cdot \bar{w}_{tt}, \quad (7)$$

$$\lambda GF \{ \bar{w}_{\bar{x}} - \varphi \} + EI \cdot \varphi_{\bar{x}\bar{x}} = \varrho I \cdot \varphi_{tt}. \quad (8)$$

Elimination von  $\varphi$  führt auf die erstmalig von Timoshenko abgeleitete partielle Differentialgleichung für die totale transversale Auslenkung des Stabes

$$\begin{aligned} EI \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - I(1 + E/\lambda G) \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}tt} + \varrho^2(I/\lambda G) \cdot \bar{w}_{tttt} + \varrho F \cdot \bar{w}_{tt} = \\ = \bar{q} + \varrho(I/\lambda G)(1/F) \cdot \bar{q}_{tt} - (I/F)(E/\lambda G) \cdot \bar{q}_{\bar{x}\bar{x}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ist  $h$  eine Bezugslänge des Querschnittes, geht Gl. (1) mit  $I = k^2 h^2 F$  und  $c = E/\lambda G$  über in

$$\begin{aligned} h^2 EF k^2 \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - h^2 \varrho F k^2 (1 + c) \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}tt} + h^2 \varrho^2 F (1/E) c k^2 \cdot \bar{w}_{tttt} + \\ + \varrho F \cdot \bar{w}_{tt} = \bar{q} + h^2 (\varrho/E) c k^2 \cdot \bar{q}_{tt} - h^2 c k^2 \cdot \bar{q}_{\bar{x}\bar{x}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Man erhält aus Gl. (2) und (7) für das Biegemoment

$$M(\bar{x}, t) = -c k^2 h^2 \cdot \bar{q} - EF k^2 h^2 \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + c k^2 \varrho F h^2 \cdot \bar{w}_{tt}. \quad (11)$$

Wird in Gl. (9) der Einfluß der Schubdehnung vernachlässigt ( $c = 0$ ), erhält man die einfachere Gleichung

$$h^2 EF k^2 \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - h^2 \varrho F k^2 \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}tt} + \varrho F \cdot \bar{w}_{tt} = \bar{q}. \quad (12)$$

Wird außerdem auch der Einfluß der Rotationsträgheit außer Betracht gelassen, reduziert sich (9) auf die Kirchhoffsche Gleichung

$$h^2 EF k^2 \cdot \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \varrho F \cdot \bar{w}_{tt} = \bar{q}. \quad (13)$$

Gl. (9) ist die Grundgleichung der Biegetheorie von Timoshenko. Sie möge kurz als Wellengleichung bezeichnet werden.



Es soll sich jetzt um einen unendlich langen Stab in einem schwerelosen Felde handeln. Rand- und Anfangsbedingungen sollen bestimmt werden. Durch Integration

von (5) erhält man  $Q(\bar{x}) = \varrho F \int_{-\infty}^{\bar{x}} \bar{w}_{tt}(\bar{x}, t) d\bar{x} - \int_{-\infty}^{\bar{x}} \bar{q}(\bar{x}, t) d\bar{x}$ , woraus hervorgeht, daß  $Q$  über die ganze Länge des Stabes stetig ist.  $Q$  ist andererseits der Schubdehnung  $\gamma$  proportional.  $\gamma$  ist notwendigerweise antisymmetrisch in bezug auf den Querschnitt  $\bar{x} = 0$ . Daraus folgt  $Q(0, t) = 0$  oder  $\bar{w}_x(0, t) - \varphi(0, t) = 0$ . Aus Symmetriegründen folgt ferner, daß das zentrale Stabelement im gesamten Schwingungsverlauf keine Drehung erhalten kann und daß somit auch  $\varphi(0, t) = 0$  ist. Es ergibt sich somit die erste Randbedingung:  $\bar{w}_x(0, t) = 0$ . Es ist somit auch  $\varphi_{tt}(0, t) = 0$  und ferner auch, aus Gl. (8),  $\varphi_{xx}(0, t) = 0$ . Wird Gl. (7) nach  $\bar{x}$  differenziert, erhält man  $\lambda GF \{\bar{w}_{xxx}(0, t) - \varphi_{xx}(0, t)\} + \bar{q}_x(0, t) = \varrho F \cdot \bar{w}_{xtt}(0, t)$  und damit die zweite Randbedingung  $\bar{w}_{xxx}(0, t) = -(1/F)(c/E) \cdot q_x(0, t)$ . Zu diesen Randbedingungen gesellen sich weitere, die aussagen, daß der Stab im Unendlichen in Ruhe bleiben muß.

Wird zunächst ein physikalischer Stoß ins Auge gefaßt, kann stets angenommen werden, daß die Stoßkraft zur Zeit  $t = 0$  gleich 0 ist und kontinuierlich, wenn auch in außerordentlich kurzer Zeitspanne, auf ihren Maximalwert ansteigt. Diese Vorstellung kann auch noch für den mathematischen Stoß aufrecht erhalten werden. Es ist dann stets  $q(\bar{x}, 0) = 0$  und eine erste Ableitung  $\bar{q}_t(\bar{x}, 0)$  vorhanden. Anfangs- und Randbedingungen des Biegestoßproblems sind somit gegeben durch

$$\bar{w}(\bar{x}, 0) = \bar{w}_t(\bar{x}, 0) = \bar{w}_{tt}(\bar{x}, 0) = 0, \quad (14)$$

$$\bar{w}_{ttt}(\bar{x}, 0) = (1/\varrho)(1/F) \cdot \bar{q}_t(\bar{x}, 0), \quad (15)$$

$$\bar{w}_x(0, t) = 0, \quad (16)$$

$$\bar{w}_{xxx}(0, t) = -(c/EF) \cdot \bar{q}_x(0, t), \quad (17)$$

$$\bar{w}(\infty, t) = \bar{w}_x(\infty, t) = 0. \quad (18)$$

Da Symmetrie in bezug auf die Stabmitte ( $\bar{x} = 0$ ) gegeben ist, kann die Untersuchung auf die rechte Stabhälfte ( $\bar{x} \geq 0$ ) beschränkt werden. Der nächste Schritt in der Rechnung soll in der Einführung eines dimensionslosen Größensystems bestehen. Es sollen Längen auf die frei gewählte Bezugslänge  $h$  bezogen werden, Kräfte auf  $Eh^2$  und Geschwindigkeiten auf  $\sqrt{(E/\varrho)}$ , die Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler (akustischer) Wellen. Es besteht sodann das Definitionsschema

$$\left. \begin{aligned} x &= h \cdot \bar{x}; & t &= h \sqrt{(\varrho/E)} \cdot \tau; & \bar{w}(\bar{x}, t) &= h \cdot w(x, \tau); \\ F &= h^2 \cdot f; & I &= k^2 h^2 \cdot F; & E/\lambda G &= c; \\ q(\bar{x}, t) &= Eh \cdot q(x, \tau); & M(\bar{x}, t) &= Eh^3 \cdot m(x, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Durch Verwendung der dimensionslosen Größen geht Gl. (11) über in

$$m(x, \tau) = c k^2 [f \{w_{\tau\tau}(x, \tau) - (1/c) \cdot w_{xx}(x, \tau)\} - q(x, \tau)], \quad (20)$$

während die Wellengleichung (9) selbst die einfachere Form annimmt:

$$\begin{aligned} k^2 \cdot w_{xxxx}(x, \tau) - k^2(1+c) \cdot w_{xx\tau\tau}(x, \tau) + c k^2 \cdot w_{\tau\tau\tau\tau}(x, \tau) + \\ + w_{\tau\tau}(x, \tau) = (1/f) [q(x, \tau) + c k^2 \{q_{\tau\tau}(x, \tau) - q_{xx}(x, \tau)\}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Anfangs- und Randbedingungen (15) und (17) sind durch

$$w_{\tau\tau}(x, 0) = (1/f) \cdot q_\tau(x, 0), \quad (22)$$

$$w_{xxx}(0, \tau) = -(c/f) \cdot q_x(0, \tau) \quad (23)$$

zu ersetzen.

Bis hierher konnte unter  $q$  jede Form kontinuierlicher Belastung verstanden werden. Indem wir unsere Aufmerksamkeit jetzt dem mathematischen Stoß zuwenden, stellen wir zunächst fest, daß der Stoßimpuls ganz allgemein durch

$$\bar{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{q}(\bar{x}, t) d\bar{x} \cdot dt = h^3 \sqrt{(\varrho E)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q(x, \tau) dx \cdot d\tau = \{h^3 \sqrt{(\varrho E)}\} \cdot S$$

gegeben ist. Aus der Definition von  $S$  und der Beziehung  $M(x, t) = E h^3 \cdot m(x, \tau)$  ergibt sich die wichtige Beziehung

$$M(\bar{x}, t) = E h^3 \cdot m(x, \tau) = \sqrt{(E/\varrho)} \cdot \{S h^3 \sqrt{(\varrho E)}\} \cdot \{m(x, \tau)/S\}, \quad (24)$$

die folgendes aussagt: bedeutet  $m$  das dem dimensionslosen Impuls  $S$  entsprechende dimensionslose Biegemoment, so ist das tatsächliche Biegemoment gleich dem Produkt des auf die Einheit des Impulses  $S$  bezogenen dimensionslosen Biegemomentes, der tatsächlichen Größe des Impulses und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen im Stab. Im folgenden soll  $m(x, \tau)$  stets auf  $S = 1$  bezogen sein. Es gilt sodann:

$$\text{Biegemoment } M = \sqrt{(E/\varrho)} \cdot \text{Impulsbetrag} \cdot m. \quad (25)$$

Wir denken uns jetzt eine Funktion  $d(u)$  der folgenden Eigenschaften gegeben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } d(u) = 0 \text{ für } u \leq 0 \text{ und für } u \geq \varepsilon, \\ \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} d(u) du = 1. \end{array} \right\} \quad (26)$$

Es wird angenommen, daß  $\varepsilon$  eine sehr kleine Größe ist und eine gegen 0 konvergierende Zahlenfolge durchläuft. Denken wir uns, daß jedem dieser Werte  $\varepsilon_n > 0$  eine Funktion  $d_n(u)$  entspricht, die die Bedingungen (a) und (b) erfüllt. Durch diese Festsetzungen ist sodann eine unendliche Folge von Funktionen definiert, die selbst wieder einen gewissen Grenzprozeß bestimmt. Es handelt sich hier wohl um eine unendliche Vielfältigkeit von Funktionenfolgen  $d_n(u)$ , dennoch bleibt die Grenzfunktion von den individuellen Eigenschaften der Elemente der Folgen offenbar unberührt. Eine solche Grenzfunktion wird, wie bekannt, als Diracsche Funktion bezeichnet. Es ist üblich, für sie das Symbol  $\delta(u)$  zu verwenden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(u) = \delta(u).$$

Die einfache Schreibweise sollte nicht verbergen, daß es sich hier um einen Grenzübergang etwas ungewöhnlicher Art handelt. Man könnte vielleicht im Zweifel darüber sein, ob man mit derartig definierten Grenzfunktionen rechnen könne. Diese tiefliegenden Schwierigkeiten bestehen aber nur, solange man versucht, die Funktion  $\delta(u)$  in absoluter mathematischer Strenge zu erfassen. Man kann aber auch in etwas allgemeinerem Sinne jede durch die Bedingungen (a) und (b) definierte Funktion  $d_n(u)$  als Diracsche Funktion auffassen, vorausgesetzt nur, daß  $\varepsilon$  eine sehr kleine Größe ist. In diesem Sinne der Definition kann aber auch stets angenommen werden, daß  $\delta(u)$  im gesamten Bereich  $-\infty, \infty$  stetig ist und überall stetige Ableitungen besitzt. Es ist jedenfalls zumeist in diesem Sinne, daß Diracsche Funktionen in Problemen der angewandten Mathematik Verwendung finden.

Nach allem Vorangehenden ist es verständlich, daß der durch einen mathematischen Stoß auf den Stab übertragene Impuls  $S$  durch Diracsche Funktionen ausgedrückt werden kann. Es gilt für  $x \geq 0$ :

$$S = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (1/2) \cdot \delta(x) \cdot \delta(\tau) dx d\tau = 1, \quad (27)$$

$$q(x, \tau) = (1/2) \cdot \delta(x) \cdot \delta(\tau). \quad (28)$$



Schließlich ist einzusehen, daß nach geringfügiger Änderung der Definitionsgleichungen für großes  $a$  auch die Funktion  $(a/2) \cdot e^{-au}$  als Diracsche Funktion aufgefaßt werden kann.

Nachdem die Grundzüge des Biegemechanismus der Theorie von Timoshenko erklärt und die Anfangs- und Randbedingungen des Biegestoßproblems analysiert sind, soll im folgenden zunächst ein einfacherer idealisierter Fall behandelt werden, der zu einer exakten, in geschlossener Form erscheinenden Lösung führt.

### III. Lösung der Wellengleichung für den speziellen Fall: $c = E/\lambda G = 1$

Die dimensionslose Konstante  $c$  bedeutet das Verhältnis  $E/\lambda G$ .  $\lambda$  selbst ist eine Konstante, über deren Zahlenwert die Meinungen verschiedener Autoren auseinandergehen. Nach Timoshenko bedeutet  $\lambda$  das Verhältnis von durchschnittlicher und maximaler Schubspannung und demnach z. B.  $2/3$  für rechteckigen Querschnitt (parabolische Spannungsverteilung). Wird die Poissonsche Konstante für Stahl mit  $\mu = 1/3$  angenommen, ergibt sich mit  $E/G = 2(1 + \mu)$ :  $c = 4$ . Mindlin hingegen zeigt<sup>6</sup>, daß durch geeignete Wahl von  $\lambda$  das Übereinstimmen der Timoshenkoschen Näherungstheorie und der Elastizitätstheorie wesentlich verbessert werden kann und daß demnach  $\lambda$  einen Zahlenwert haben müßte, der zwischen 0,8 und 0,9 liegt. Ayre und Jacobsen haben auf dieser Grundlage einen Zahlenwert  $\lambda = 0,87$  berechnet. Daraus würde  $c = 3,07$  folgen. Jedenfalls kann  $c$  nicht kleiner als 2 sein. Bedenkt man aber, daß die Theorie von Timoshenko nur den Wert einer Näherung hat und daß Vernachlässigung der Schubdehnung gleichbedeutend mit der Festsetzung  $c = 0$  ist, dann erscheint es naheliegend, auch dem Fall  $c = 1$  Aufmerksamkeit zuzuwenden. Eine Untersuchung der Wellengleichung (21) ergibt, daß man für  $c = 1$  mit besonderen mathematischen Vereinfachungen rechnen kann. Aus diesen und anderen Gründen gewinnt die Untersuchung des idealisierten Falles  $c = 1$  großes theoretisches Interesse. Zumindest ermöglicht sie ein eingehenderes Studium der mathematischen Eigenschaften der Wellengleichung in einem einfacheren Falle. Die Festsetzung  $c = 1$  hat in gewissem Sinne auch physikalische Bedeutung. Sie ist nämlich gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die beiden die totale Stoßwelle zusammensetzenden Wellenkomponenten gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit ( $\sqrt{E/\rho}$ ) besitzen sollen.

Die Stoßkraft soll zunächst durch

$$q(x, \tau) = (a/2) e^{-ax} \cdot \delta(\tau) \quad (29)$$

dargestellt werden.  $a$  bedeute eine große positive Konstante. Ferner soll, wie angekündigt, im folgenden

$$c = E/\lambda G = 1 \quad (30)$$

sein. Die Wellengleichung (21) geht sodann in die einfachere Form über:

$$k^2 \cdot w_{xxxx}(x, \tau) - 2k^2 \cdot w_{xx\tau\tau}(x, \tau) + k^2 \cdot w_{\tau\tau\tau\tau}(x, \tau) + w_{\tau\tau}(x, \tau) = (1/f) \{q(x, \tau) + k^2 [q_{\tau\tau}(x, \tau) - q_{xx}(x, \tau)]\}. \quad (31)$$

Die Lösung von Gl. (31) soll durch zweimalige Anwendung der Laplaceschen Transformation erzielt werden. Die erste soll sich auf die Zeit ( $\tau$ ), die zweite auf die Raumkoordinate ( $x$ ) beziehen. Führt man durch

$$W(x, p) = L_{(\tau)} \{w(x, \tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \cdot w(x, \tau) d\tau \quad (32)$$

die Laplacesche Transformation der unbekannten Lösung ein und bedenkt man, daß  $L\{\delta(\tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \cdot \delta(\tau) d\tau = 1$  ist, erhält man die transformierte Wellengleichung

$$k^2 \cdot W_{xxx}(x, p) - 2k^2 p^2 \cdot W_{xx}(x, p) + p^2(1 + k^2 p^2) \cdot W(x, p) = (a/2f) e^{-ax} [1 + k^2(p^2 - a^2)] = F(x, p). \quad (33)$$

Führt man jetzt die auf  $x$  bezogene Laplacesche Transformation von  $W(x, p)$  ein,

$$\omega(q, p) = L_{(x)} \{W(x, p)\} = \int_0^\infty e^{-qx} \cdot W(x, p) dx, \quad (34)$$

erhält man die Gleichung

$$\omega(q, p) = (1/k)^2 \cdot \{1/g(q, p)\} \cdot L_{(x)} \{F(x, p)\} \quad (35)$$

mit  $g(q, p) = q^4 - 2p^2 q^2 + p^2(p^2 + 1/k^2)$ . Die inverse Laplacesche Transformation von  $1/g$  ergibt sich in der Gestalt

$$L_{(x)}^{-1} \{1/g(q, p)\} = (k/4p) \{e^{q_1 x}/q_1 - e^{-q_1 x}/q_1 + e^{-q_3 x}/q_3 - e^{q_3 x}/q_3\}, \quad (36)$$

worin  $q_1$  und  $q_3$  durch

$$q_1 = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p + i/k}; \quad q_3 = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p - i/k} \quad (37)$$

definiert sind. Eine partikuläre Lösung von Gl. (33) ist

$$\begin{aligned} \bar{W}(x, p) = (1/4ikp) \int_0^x F(s, p) \{e^{q_1(x-s)}/q_1 - e^{-q_1(x-s)}/q_1 - \\ - e^{q_3(x-s)}/q_3 + e^{-q_3(x-s)}/q_3\} ds. \end{aligned} \quad (38)$$

Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$W(x, p) = A e^{q_1 x} + B e^{-q_1 x} + C e^{q_3 x} + D e^{-q_3 x} + \bar{W}(x, p).$$

Die unbekannten Konstanten  $A, B, C$  und  $D$  ergeben sich aus den Randbedingungen, die die transformierte Gestalt annehmen:

$$W_x(0, p) = 0; \quad W_{xxx}(0, p) = a^2/2f; \quad W(\infty, p) = W_x(\infty, p) = 0. \quad (39)$$

Die erste Transformation der Lösung für die Auslenkung  $w(x, \tau)$  des Stabes erscheint nun in der Gestalt

$$\begin{aligned} W(x, p) = (i a^2/4fp) \left( \frac{i p - 1/k}{p^2 + p i/k - a^2} \{e^{-q_1 x}/q_1 - e^{-ax}/a\} + \right. \\ \left. + \frac{i p + 1/k}{p^2 - p i/k - a^2} \{e^{-q_3 x}/q_3 - e^{-ax}/a\} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Daraus ergibt sich unter Bezugnahme auf Gl. (20) die Laplacesche Transformation des Biegemomentes:

$$\begin{aligned} L_{(\tau)} \{m(x, \tau)\} = \frac{k a^2}{4} \left( \frac{i p - 1/k}{p^2 + p i/k - a^2} \{e^{-q_1 x}/q_1 - e^{-ax}/a\} - \right. \\ \left. - \frac{i p + 1/k}{p^2 - p i/k - a^2} \{e^{-q_3 x}/q_3 - e^{-ax}/a\} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Bedeutet aber  $J_0$  die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 0, so ist

$$L_{(\tau)} \left( \frac{e^{-\sqrt{p} \sqrt{p \pm i/k} \cdot x}}{\sqrt{p} \sqrt{p \pm i/k}} \right) = \begin{cases} 0 & \dots \tau \leq x \\ e^{\mp i \tau/2 k} \cdot J_0 \left[ 1/2 k \sqrt{(\tau^2 - x^2)} \right] & \dots \tau > x. \end{cases} \quad (42)$$

Andererseits gelten mit

$$\mu = \sqrt{a^2 - 1/4 k^2} \quad (43)$$

die Transformationsgleichungen

$$L_{(\tau)}^{-1} \left( \frac{i p \mp 1/k}{p^2 \pm p i/k - a^2} \right) = e^{\mp i \tau/2 k} \left( i \cdot \cosh \mu \tau \mp \frac{1}{2k\mu} \cdot \sinh \mu \tau \right). \quad (44)$$



Das Biegemoment erscheint somit in der Form

$$m(x, \tau) = (ka^2/4) \{ -\sin(\tau/2k) \cdot P(x, \tau, a) + \\ + (1/2k\mu) \cdot \cos(\tau/2k) \cdot Q(x, \tau, a) \} \quad (45)$$

mit

$$P(x, \tau, a) = (e^{-ax}/a) \cosh \mu \tau - \int_x^\tau \cosh(\tau - u) \cdot J_0[1/2k\sqrt{(u^2 - x^2)}] du, \quad (46)$$

$$Q(x, \tau, a) = (e^{-ax}/a) \sinh \mu \tau - \int_x^\tau \sinh(\tau - u) \cdot J_0[1/2k\sqrt{(u^2 - x^2)}] du. \quad (47)$$

Die durch Gl. (45) definierte Funktion  $m(x, \tau)$  ist die exakte Lösung für das Biegemoment, unter der einschränkenden Voraussetzung  $c = 1$ .

Die Lösung erscheint in einer der numerischen Auswertung nicht sehr zugänglichen Form und überdies ist der Grenzübergang  $a \rightarrow \infty$  noch auszuführen. Diesen herzuleiten, ist vor allem zu zeigen, daß  $m(x, \tau)$  für  $\tau \rightarrow \infty$  verschwindet.

Für großes  $\tau$  kann  $P(x, \tau, a)$  angenähert werden durch

$$P(x, \tau, a) = 2 \cdot \cosh \mu \tau \{ (e^{-ax}/a) - f(x, \tau, a) \} \quad (48)$$

mit  $f(x, \tau, a) = \int_0^\tau H(u - x) \cdot e^{-\mu u} \cdot J_0[1/2k\sqrt{(u^2 - x^2)}] du$ , sofern unter  $H(u)$  die Schrittfunktion verstanden wird ( $H(u) = 0$  für  $u \leq 0$ ,  $= 1$  für  $u > 0$ ). Aus Gl. (42) folgt

$$r(x, p, a) = \frac{e^{-\sqrt{[(p+\mu)^2 + 1/4k^2]}}}{\sqrt{[(p+\mu)^2 + 1/4k^2]}} = L_{(u)} \{ e^{-\mu u} \cdot J_0[1/2k\sqrt{(u^2 - x^2)}] \cdot H(u - x) \} \quad (49)$$

und weiter:  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(x, \tau, a) = \lim_{p \rightarrow 0} r(x, p, a) = e^{-ax}/a$ , womit gezeigt ist, daß für beliebig großes konstantes  $a$  der Klammerausdruck von  $P(x, \tau, a)$  gegen 0 konvergiert.  $P(x, \tau, a)$  ist somit ein Ausdruck der Form  $\infty \cdot 0$ , der in der üblichen Weise zum Grenzwert  $\tau \rightarrow \infty$  übergeführt werden kann. Man erhält

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P(x, \tau, a) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \{ J_0[1/2k\sqrt{(\tau^2 - x^2)}] / \mu \} = 0. \quad (50)$$

Der Konvergenzbeweis für  $Q(x, \tau, a)$  ist dem von  $P(x, \tau, a)$  analog und es ist somit bewiesen, daß

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} m(x, \tau) = 0, \quad (51)$$

für konstantes  $x$  und konstantes, beliebig großes  $a$ . Der Grenzwert des Biegemomentes  $m(x, \tau)$  für  $a \rightarrow \infty$  ist nun leicht zu ermitteln. Setzt man

$$z(u) = (1/2k) \cdot \sqrt{(u^2 - x^2)} \quad (52)$$

und schreibt man zur Abkürzung  $\frac{d^n}{(du)^n} \{ J_0[z(u)] \} = J_0^{(n)}$ , erhält man für die Funktion  $P(x, \tau, a)$  nach einigen Umformungen

$$P(x, \tau, a) = (e^{-ax}/a) e^{\mu \tau} - e^{\mu \tau} \int_x^\tau e^{-\mu u} \cdot J_0[z(u)] du - e^{-\mu \tau} \int_x^\tau e^{\mu u} \cdot J_0[z(u)] du. \quad (53)$$

Fortgesetzte partielle Integration führt zu den Reihenentwicklungen

$$\int e^{-\mu u} \cdot J_0[z(u)] du = -e^{-\mu u} \cdot \varphi(u, x) = -(e^{-\mu u}/\mu) (J_0 + J_0'/\mu + J_0''/\mu^2 + \dots), \quad (54)$$

$$\int e^{\mu u} \cdot J_0[z(u)] du = e^{\mu u} \cdot \psi(u, x) = (e^{\mu u}/\mu) (J_0 - J_0'/\mu + J_0''/\mu^2 - \dots). \quad (55)$$

Man erhält somit

$$P(x, \tau, a) = (e^{-ax}/a) e^{\mu \tau} + \varphi(\tau, x) - \psi(\tau, x) - e^{\mu(\tau-x)} \varphi(x, x) + e^{-\mu(\tau-x)} \psi(x, x). \quad (56)$$

Aus Gl. (48) folgt aber:  $e^{-ax}/a = e^{-\mu x} \cdot \varphi(x, x)$ . Der Ausdruck  $P(x, \tau, a)$  reduziert sich somit auf

$$P(x, \tau, a) = \varphi(\tau, x) - \psi(\tau, x) + e^{-\mu(\tau-x)} \psi(x, x). \quad (57)$$

In analoger Weise erhält man

$$Q(x, \tau, a) = \varphi(\tau, x) + \psi(\tau, x) - e^{-\mu(\tau-x)} \psi(x, x). \quad (58)$$

Der Grenzübergang  $a \rightarrow \infty$  kann jetzt ohne weitere Schwierigkeiten ausgeführt werden. Dies führt zur Lösung für das Biegemoment:

$$m(x, \tau) = 0 \begin{cases} \dots \tau \leq x, \\ (1/4) [\cos(\tau/2 k) \cdot J_0\{1/2 k \sqrt{\tau^2 - x^2}\} + \\ + \sin(\tau/2 k) \cdot J_1\{1/2 k \sqrt{\tau^2 - x^2}\} \cdot \tau / \sqrt{\tau^2 - x^2}] \dots \tau > x. \end{cases} \quad (59)$$

$J_1(z)$  bezeichnet die Besselsche Funktion erster Art und erster Ordnung. Das Biegemoment bleibt an einer Stelle  $x$  bis zur Zeit  $\tau = x$  in Ruhe. Es handelt sich also tatsächlich um endliche Störungsausbreitungsgeschwindigkeiten, im Gegensatz zur Kirchhoffschen Näherungstheorie.

Hätte man schon in Gl. (41) den Grenzübergang  $a \rightarrow \infty$  ausgeführt, wäre man zu der Beziehung

$$L_{(\tau)}\{m(x, \tau)\} = (k/4) [(ip + 1/k) \cdot e^{-\sqrt{p} \sqrt{p-i/k} \cdot x} / \sqrt{p} \sqrt{p-i/k} - \\ - (ip - 1/k) \cdot e^{-\sqrt{p} \sqrt{p+i/k} \cdot x} / \sqrt{p} \sqrt{p+i/k}]] \quad (60)$$

gelangt. Die Richtigkeit von (59) wäre sodann bestätigt, wenn gezeigt werden könnte, daß (60) die Laplacesche Transformation der durch (59) definierten Funktion ist. Zu diesem Zweck definieren wir die Funktion

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \dots \tau \leq x, \\ e^{-i\tau/2 k} \cdot J_0\{1/2 k \sqrt{\tau^2 - x^2}\} \dots \tau > x. \end{cases} \quad (61)$$

$\varphi(p)$  sei die Laplacesche Transformation von  $f(\tau)$ . In bezug auf die Ableitung  $f'(\tau)$  ist Vorsicht geboten, da  $f(\tau)$  an der Stelle  $\tau = x$  diskontinuierlich ist. Es soll darum noch eine Funktion  $\bar{f}(\tau)$  definiert werden, die mit  $f(\tau)$  enge verwandt ist:

$$\bar{f}(\tau) = \begin{cases} f'(\tau) \dots \tau < x, \\ 0 \dots \tau = x, \\ f'(\tau) \dots \tau > x. \end{cases} \quad (62)$$

Man erhält damit nach einigen elementaren Umformungen die Beziehung

$$\varphi(p) = L\{f(\tau)\} = e^{-\sqrt{p} \sqrt{p+i/k} \cdot x} / \sqrt{p} \sqrt{p+i/k} = (1/p) [f(x) e^{-px} + L\{\bar{f}(\tau)\}]. \quad (63)$$

Somit ist schließlich

$$p \cdot \varphi(p) = L\{\bar{f}(\tau)\} + f(x) \cdot L\{\delta(\tau - x)\}. \quad (64)$$

Wird (64) sinngemäß auf (60) angewendet, erhält man das endgültige Resultat  $m(x, \tau)$  in voller Übereinstimmung mit Gl. (59).

Aus den vorangehenden Untersuchungen sind die Vorteile deutlich hervorgetreten, die sich aus der Anwendung der Diracschen Funktion  $\delta(u)$  auf die analytische Be-



handlung des mathematischen Stoßes ergeben. Es ist naheliegend, einen Schritt weiter zu gehen und die Stoßkraft direkt durch

$$q(x, \tau) = (1/2) \delta(x) \delta(\tau) \quad (65)$$

in die Rechnung einzuführen. Es gelten sodann die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} L_{(\tau)}\{q(x, \tau)\} &= \int_0^\infty e^{-p\tau} q(x, \tau) d\tau = (1/2) \delta(x), \\ L_{(\tau)}\{q_{\tau\tau}(x, \tau)\} &= (1/2) p^2 \delta(x), \\ L_{(\tau)}\{q_{xx}(x, \tau)\} &= (1/2) \delta_{xx}(x). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Für die Laplacesche Transformation  $W(x, p)$  der Durchbiegung  $w(x, \tau)$  erhält man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} k^2 \cdot W_{xxxx}(x, p) - 2k^2 p^2 \cdot W_{xx}(x, p) + p^2 (1 + k^2 p^2) \cdot W(x, p) &= \\ = L_{(\tau)}\{(1/f)[q(x, \tau) + k^2[q_{\tau\tau}(x, \tau) - q_{xx}(x, \tau)]]\} &= \\ = (1/2 f) \{\delta(x) + k^2[p^2 \delta(x) - \delta_{xx}(x)]\}. \end{aligned} \quad (67)$$

Gl. (67) ist gemäß

$$\omega(q, p) = L_{(x)}\{W(x, p)\} = \int_0^\infty e^{-qx} W(x, p) dx \quad (68)$$

in eine algebraische Gleichung für  $\omega(q, p)$  zu verwandeln. Es ist

$$\left. \begin{aligned} L_{(x)}\{\delta(x)\} &= 1, \\ L_{(x)}\{\delta_{xx}(x)\} &= q^2. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Die zweite der Gl. (69) gilt, streng genommen, nur für  $\delta(0) = \delta_x(0) = 0$ . Sind  $\delta(0)$  und  $\delta_x(0)$  von Null verschieden, entstehen zusätzliche Glieder, die entsprechende Gegenglieder auf der linken Gleichungsseite zur Folge haben. Diese einander entprechenden Ausdrücke heben sich notwendigerweise auf.

Aus den Randbedingungen folgt weiter, daß  $W_1 = W_x(0, p) = 0$  und auch  $W_3 = W_{xxx}(0, p) = 0$  ist. Die beiden anderen hier auftretenden Konstanten  $W_0 = W(0, p)$  und  $W_2 = W_{xx}(0, p)$  sind von vornherein nicht bekannt, müssen vielmehr nachträglich aus den noch nicht verwendeten Randbedingungen bestimmt werden. Die zweifach transformierte Durchbiegung  $\omega(q, p)$  erscheint in der Gestalt

$$\omega(q, p) = \frac{q^3 W_0 - (1/2 f) q^2 + (W_2 - 2 p^2 W_0) q + (1/2 f) (p^2 + 1/k^2)}{q^4 - 2 p^2 q^2 + p^2 (p^2 + 1/k^2)} \quad (70)$$

und damit ergibt sich die inverse Transformation als

$$\begin{aligned} W(x, p) &= \frac{(1/2 f) (1/k^2 + p^2 - q_1^2) + q_1^3 W_0 + q_1 W_2 - 2 p^2 q_1 W_0}{4 q_1 (q_1^2 - p^2)} e^{q_1 x} + \\ &+ \frac{-(1/2 f) (1/k^2 + p^2 - q_1^2) + q_1^3 W_0 + q_1 W_2 - 2 p^2 q_1 W_0}{4 q_1 (q_1^2 - p^2)} e^{-q_1 x} + \\ &+ \frac{(1/2 f) (1/k^2 + p^2 - q_3^2) + q_3^3 W_0 + q_3 W_2 - 2 p^2 q_3 W_0}{4 q_3 (q_3^2 - p^2)} e^{q_3 x} + \\ &+ \frac{-(1/2 f) (1/k^2 + p^2 - q_3^2) + q_3^3 W_0 + q_3 W_2 - 2 p^2 q_3 W_0}{4 q_3 (q_3^2 - p^2)} e^{-q_3 x}. \end{aligned} \quad (71)$$

Aus dem Aufbau von  $W(x, p)$  ist ersichtlich, daß die Randbedingungen (18) dann und nur dann erfüllt sind, wenn die Zähler der Faktoren der ansteigenden Exponentialfunktionen für  $p$  identisch verschwinden. Daraus folgt

$$W(x, p) = (1/4 f p) \{(p + i/k) e^{-q_1 x/q_1} + (p - i/k) e^{-q_3 x/q_3}\} \quad (72)$$

und weiter, für das Biegemoment:

$$L_{(\tau)}[m(x, \tau)] = \frac{k}{4} \left[ \left( i p + \frac{1}{k} \right) \frac{e^{-x\sqrt{p}\sqrt{(p-i/k)}}}{\sqrt{p}\sqrt{(p-i/k)}} - \left( i p - \frac{1}{k} \right) \frac{e^{-x\sqrt{p}\sqrt{(p+i/k)}}}{\sqrt{p}\sqrt{(p+i/k)}} \right] \quad (73)$$

in voller Übereinstimmung mit (60).

Die Ermittlung der Lösung des idealisierten Spezialfalles  $c = 1$  ist damit abgeschlossen. Im folgenden soll die exakte Lösung für den allgemeinen Fall abgeleitet werden. Es wird zu zeigen sein, daß sich diese durch analytische Fortsetzung und Integration in der komplexen Ebene in geschlossener Form darstellen läßt.

#### IV. Lösung der Wellengleichung für den allgemeinen Fall.

##### Bestimmung der zeitlichen Laplaceschen Transformation der Lösung

Es wird jetzt angenommen, daß die Konstante  $c = E/\lambda G$  einen beliebigen positiven Wert besitzt. Die Stoßkraft  $q(x, \tau)$  soll zunächst wieder als kontinuierliche Funktion in die Rechnung eingeführt werden. Setzt man

$$q(x, \tau) = \begin{cases} (1/2)(1/2\varepsilon)\sin(x/\varepsilon)(1/2\eta)\sin(\tau/\eta) \dots & \begin{cases} 0 < x < \pi\varepsilon, \\ 0 < \tau < \pi\eta, \end{cases} \\ 0 & \dots\dots\dots \begin{cases} x > \pi\varepsilon, \\ \tau > \pi\eta, \end{cases} \end{cases} \quad (74)$$

ist der Gesamtimpuls  $S$  sicher gleich 1. Andererseits ist offenbar

$$\lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} q(x, \tau) = (1/2) \delta(x) \delta(\tau).$$

Unter Rücksichtnahme auf die Beziehungen

$$L_{(\tau)}\{w(x, \tau)\} = W(x, p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} w(x, \tau) d\tau, \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{(\tau)}\{q(x, \tau)\} &= (1/8\varepsilon)\sin(x/\varepsilon)(1 + e^{-\eta\pi p})/(\eta^2 p^2 + 1), \\ L_{(\tau)}\{q_{xx}(x, \tau)\} &= -(1/8\varepsilon^3)\sin(x/\varepsilon)(1 + e^{-\eta\pi p})/(\eta^2 p^2 + 1), \\ L_{(\tau)}\{q_{\tau\tau}(x, \tau)\} &= (p^2/8\varepsilon)\sin(x/\varepsilon)(1 + e^{-\eta\pi p})/(\eta^2 p^2 + 1) - q_\tau(x, 0) \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

und die Anfangsbedingung  $w_{\tau\tau}(x, 0) = (1/f) q_\tau(x, 0)$  ergibt sich die transformierte Gleichung

$$\begin{aligned} k^2 W_{xxxx}(x, p) - (c + 1) k^2 p^2 W_{xx}(x, p) + p^2 (1 + c k^2 p^2) W(x, p) = \\ = (1/8 f \varepsilon) \sin(x/\varepsilon) \{1 + c k^2 (p^2 + 1/\varepsilon^2)\} (1 + e^{-\eta\pi p})/(\eta^2 p^2 + 1). \end{aligned} \quad (77)$$

Transformiert man weiter gemäß

$$\omega(q, p) = L_{(x)}\{W(x, p)\} = \int_0^\infty e^{-qx} W(x, p) dx, \quad (78)$$

folgt mit  $W_0 = W(0, p)$  und  $W_2 = W_{xx}(0, p)$

$$\omega(q, p) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &(q^3 W_0 + q W_2) - (c + 1) p^3 q W_0 + \\ &+ (1/8 f) [1/k^2 + c(p^2 - q^2)] \frac{(1 + e^{-\varepsilon\pi q})}{\varepsilon^2 q^2 + 1} \frac{(1 + e^{-\eta\pi p})}{\eta^2 p^2 + 1} \end{aligned} \right\}}{q^4 - (c + 1) p^3 q^2 + p^3 (c p^2 + 1/k^2)}. \quad (79)$$

Wird jetzt zur Vereinfachung

$$\varphi(u, v) = (1/2) (1 + e^{-uv\pi})/(u^2 v^2 + 1) \quad (80)$$



gesetzt und werden die Wurzeln des Nenners von (79) mit  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  und  $q_4$  bezeichnet, kann die inverse Transformation  $W(x, p)$  von  $\omega(q, p)$  sofort angeschrieben werden. Es gilt

$$\left. \begin{matrix} q_1 \\ q_3 \end{matrix} \right\} = \sqrt{(c+1)p^2/2 \pm (p/2) \sqrt{(c-1)^2 p^2 - (2/k)^2}} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} W(x, p) = & e^{q_1 x} \frac{(1/2f) \varphi(\varepsilon, q_1) \varphi(\eta, p) [1/k^2 + c(p^2 - q_1^2)] + q_1^3 W_0 + q_1 W_2 - (c+1)p^2 q_1 W_0}{4 q_1 [q_1^2 - (c+1)p^2/2]} + \\ & + e^{-q_1 x} \frac{(1/2f) \varphi(\varepsilon, -q_1) \varphi(\eta, p) [1/k^2 + c(p^2 - q_1^2)] + q_1^3 W_0 + q_1 W_2 - (c+1)p^2 q_1 W_0}{4 q_1 [q_1^2 - (c+1)p^2/2]} + \\ & + e^{q_3 x} \frac{(1/2f) \varphi(\varepsilon, q_3) \varphi(\eta, p) [1/k^2 + c(p^2 - q_3^2)] + q_3^3 W_0 + q_3 W_2 - (c+1)p^2 q_3 W_0}{4 q_3 [q_3^2 - (c+1)p^2/2]} + \\ & + e^{-q_3 x} \frac{(1/2f) \varphi(\varepsilon, -q_3) \varphi(\eta, p) [1/k^2 + c(p^2 - q_3^2)] + q_3^3 W_0 + q_3 W_2 - (c+1)p^2 q_3 W_0}{4 q_3 [q_3^2 - (c+1)p^2/2]} \end{aligned} \quad (82)$$

Wieder muß  $W(x, p)$  für  $x \rightarrow \infty$  in  $p$  identisch verschwinden. Dies ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Zähler der Koeffizienten von  $e^{q_1 x}$  und  $e^{q_3 x}$ . Es ist somit

$$\begin{aligned} W(x, p) = & - (1/8f) \varphi(\eta, p) \left\{ \frac{[1/k^2 + c(p^2 - q_1^2)] [\varphi(\varepsilon, q_1) + \varphi(\varepsilon, -q_1)] e^{-q_1 x/q_1}}{[q_1^2 - (c+1)p^2/2]} + \right. \\ & \left. + \frac{[1/k^2 + c(p^2 - q_3^2)] [\varphi(\varepsilon, q_3) + \varphi(\varepsilon, -q_3)] e^{-q_3 x/q_3}}{[q_3^2 - (c+1)p^2/2]} \right\}. \end{aligned} \quad (83)$$

Im Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \varphi(\varepsilon, v) + \varphi(\varepsilon, -v) \} / 2 = 1 \quad (84)$$

und daraus folgt

$$W(x, p) = - (1/4f) \varphi(\eta, p) \left\{ \frac{[1/k^2 + c(p^2 - q_1^2)] e^{-q_1 x/q_1}}{q_1^2 - (c+1)p^2/2} + \frac{[1/k^2 + c(p^2 - q_3^2)] e^{-q_3 x/q_3}}{q_3^2 - (c+1)p^2/2} \right\} \quad (85)$$

und weiter für das Biegemoment

$$L_{(\tau)} \{ m(x, \tau) \} = \varphi(\eta, p) / 2 \left\{ \frac{q_1 e^{-q_1 x}}{q_1^2 - q_3^2} - \frac{q_3 e^{-q_3 x}}{q_1^2 - q_3^2} \right\}. \quad (86)$$

Daraus ergibt sich schließlich, wenn noch der Grenzübergang  $\eta \rightarrow 0$  ausgeführt wird,

$$L_{(\tau)} \{ m(x, \tau) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q_1 e^{-q_1 x}}{q_1^2 - q_3^2} - \frac{q_3 e^{-q_3 x}}{q_1^2 - q_3^2} \right\}. \quad (87)$$

Das Resultat (87) läßt sich auf wesentlich kürzerem Wege herleiten, wenn man den Stoß direkt durch das Produkt zweier Diracscher Funktionen in die Rechnung einführt. Setzt man also

$$q(x, \tau) = (1/2) \delta(x) \delta(\tau), \quad (88)$$

folgt

$$\begin{aligned} k^2 W_{xxxx} - (c+1) k^2 p^2 W_{xx} + p^2 (1 + c k^2 p^2) W = \\ = (1/2f) \{ \delta(x) + c k^2 [p^2 \delta(x) - \delta_{xx}(x)] \} \end{aligned} \quad (89)$$

und

$$\omega(q, p) = \frac{(1/2f) [1/k^2 + c(p^2 - q^2)] + q^3 W_0 + q W_2 - (c+1)p^2 q W_0}{q^4 - (c+1)p^2 q^2 + p^2 (c p^2 + 1/k^2)}. \quad (90)$$

Inversion von  $\omega(q, p)$  in bezug auf  $x$  führt auf  $W(x, p) = L_{(\tau)} \{ w(x, \tau) \}$  und  $L_{(\tau)} \{ m(x, \tau) \}$  in Übereinstimmung mit (87).

Gl. (87) stellt die auf die Zeit  $\tau$  bezogene Laplacesche Transformation des Biegemomentes dar. Es handelt sich jetzt darum, die Inversion in bezug auf  $\tau$  zu bestimmen. Im Fall  $c = 1$  waren die inversen Transformationen der Hauptbestandteile

der auftretenden Funktionen bekannt. Dies ist im allgemeinen Fall  $c > 1$  nicht der Fall. Inversion erfordert hier analytische Fortsetzung und Integration in der komplexen Zahlenebene.

### V. Lösung der Wellengleichung für den allgemeinen Fall.

#### Inversion durch analytische Fortsetzung und Integration in der komplexen Zahlenebene

Die durch Gl. (87) definierte Laplacesche Transformation der Lösung für das Biegemoment  $m(x, \tau)$  des durch einen transversalen Schlag zu Schwingungen erregten Stabes ist vieldeutig. Dies ist aus dem Auftreten der ineinander verflochtenen Quadratwurzeln ersichtlich. Für einen durch entsprechende Festsetzungen eindeutig gemachten Ast der Funktion  $L_{(\tau)}\{m(x, \tau)\}$  gilt nach dem Mellinschen Inversionstheorem

$$m(x, \tau) = \frac{(1/2)}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \{q_1(p) e^{-q_1 x} - q_3(p) e^{-q_3 x}\} \frac{e^{p\tau} dp}{q_1^2(p) - q_3^2(p)}. \quad (91)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung mögen die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$M = \sqrt{(c+1)/2}; \quad N = (c-1)/(c+1), \quad (92)$$

$$a = 2/[k(c-1)]; \quad b = 1/[k\sqrt{c}], \quad (93)$$

$$s(p) = N \sqrt{[(p+a)(p-a)]}, \quad (94)$$

$$A(p) = M \sqrt{p} \sqrt{[p+s(p)]}, \quad (95)$$

$$B(p) = M \sqrt{p} \sqrt{[p-s(p)]}, \quad (96)$$

$$\bar{A}(p) = A(p)/[p \cdot s(p)] \cdot e^{-A(p)x}, \quad (97)$$

$$\bar{B}(p) = -B(p)/[p \cdot s(p)] \cdot e^{-B(p)x}, \quad (98)$$

$$m(u) = N \sqrt{(u^2 - a^2)}; \quad n(u) = N \sqrt{(u^2 + a^2)}, \quad (99)$$

$$t(u) = N \sqrt{(a^2 - u^2)}, \quad (100)$$

$$r(u) = \sqrt{\{u^2 + t^2(u)\}}, \quad (101)$$

$$D(u) = M \sqrt{u} \sqrt{\{n(u) - u\}}, \quad (102)$$

$$\varphi(u) = \sqrt{\{r(u) + u\}}/\sqrt{2}, \quad (103)$$

$$\psi(u) = \sqrt{\{r(u) - u\}}/\sqrt{2}, \quad (104)$$

$$\tan \alpha(u) = t(u)/u, \quad (105)$$

$$\sin [\alpha(u)/2] = \psi(u)/\sqrt{r(u)}, \quad (106)$$

$$\cos [\alpha(u)/2] = \varphi(u)/\sqrt{r(u)},$$

$$d(u) = \sqrt{u} \sqrt{(1/k - u)}. \quad (107)$$

Die durch (87) definierte Funktion erscheint nun in der Gestalt

$$L_{(\tau)}\{m(x, \tau)\} = (1/4 M^2) \{\bar{A}(p) + \bar{B}(p)\}. \quad (108)$$

Es erscheint vorteilhaft, die beiden Funktionen  $\bar{A}(p)$  und  $\bar{B}(p)$  getrennt zu behandeln.

Soll  $\bar{A}(p)$  durch ein System entsprechender Festsetzungen eindeutig gemacht werden, ist zu bedenken, daß  $\bar{A}(p)$  für hinreichend großes reelles  $p$  reell und positiv



sein muß. Ein eindeutiger Ast der Funktion  $\bar{A}(p)$  kann durch die folgenden Bestimmungen festgelegt werden:

$$\left. \begin{aligned} p + a &= r_1 e^{i\alpha_1}; & p - a &= r_2 e^{i\alpha_2}; & -\pi < \alpha_1, \alpha_2 &\leq \pi, \\ s(p) &= N \sqrt{\{(p+a)(p-a)\}} = N \sqrt{(r_1 \cdot r_2)} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)/2}, \\ p + s(p) &= R_1 e^{i\beta_1}; & p &= R e^{i\beta}; & -\pi < \beta, \beta_1 &\leq \pi, \\ \sqrt{\{p + s(p)\}} &= \sqrt{R_1} \cdot e^{i\beta_1/2}; & \sqrt{p} &= \sqrt{R} \cdot e^{i\beta/2}, \\ A(p) &= M \sqrt{p} \sqrt{\{p + s(p)\}} = M \sqrt{(R R_1)} \cdot e^{i(\beta + \beta_1)/2}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Die folgenden Grenzwerte ergeben sich unmittelbar:

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} s(p) = N \sqrt{p} \sqrt{p} = N p = p(c-1)/(c+1), \quad (110)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} A(p) = M \sqrt{p} \sqrt{p} \sqrt{\{2c/(c+1)\}} = p \sqrt{c}, \quad (111)$$

$$\lim_{c \rightarrow 1} A(p) = \sqrt{p} \sqrt{(p + i/k)}. \quad (112)$$

$\bar{A}(p)$  hat Verzweigungspunkte an den Stellen  $(0, 0)$ ,  $(-a, 0)$  und  $(+a, 0)$ . Die Punkte  $(0, +ib)$  und  $(0, -ib)$  hingegen sind nicht Verzweigungspunkte von  $\bar{A}(p)$ . In der folgenden Abbildung sind zwei sich zu einem geschlossenen Linienzug verbindende Konturen wiedergegeben. Die eine ist die zur imaginären Achse parallele rechts vom Punkt  $(+a, 0)$  liegende Gerade  $Br(1)$ . Die Kontur  $Br(2)$  folgt dem Linienzug  $(1, 2, 3, \dots, 13, 14)$ . Die die Verzweigungspunkte umschließenden kleinen Kreise sind als unendlich klein zu denken, und ebenso muß  $R$  als unendlich groß gedacht werden.

Im folgenden soll zur Vereinfachung

$$m_1(x, \tau) = (1/4 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{A}(p) e^{p\tau} dp \quad (113)$$

gesetzt werden. Aus (111) folgt, daß  $m_1(x, \tau)$  für  $\tau < x\sqrt{c}$  verschwindet. Da die den unendlichen Viertelkreisen (1, 2) und (13, 14) entsprechenden Integrationsbeiträge für sich verschwinden, kann die Kontur  $Br(1)$  durch den Weg  $(2, 3, 4, \dots, 12, 13)$  ersetzt werden. Die Integration vereinfacht sich weiter dadurch, daß der Integrand an den Verzweigungsstellen nur von der Ordnung  $1/2$  divergiert und die um diese gelegten Kreise demnach keine Beiträge liefern können. Von den verbleibenden Beiträgen werden sich noch einige gegenseitig aufheben. Die den Eindeutigkeitsfestsetzungen (109) entsprechenden Werte von  $\bar{A}(p)$  sind zu erhöhter Übersichtlichkeit in der nachfolgenden Tabelle angeordnet. Das vor dem Beistrich stehende Symbol bedeutet den absoluten Betrag  $|z|$ , das dahinter stehende das Argument  $\arg(z)$  der ermittelten komplexen Zahl.

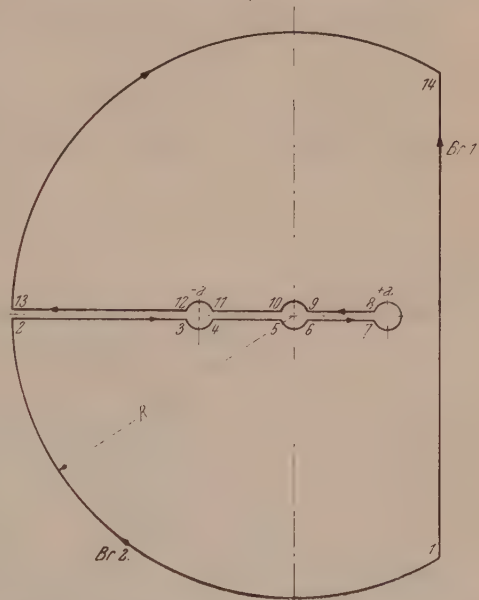


Abb. 1. Integrationsweg  $Br(2)$  für die Inversion von  $\bar{A}(p)$

Weg	$s(p)$	$A(p)$
(2, 3)	$m(u), -\pi$	$M\sqrt{u}\sqrt{\{u+m(u)\}}, -\pi$
(4, 5)	$t(u), -\pi/2$	$M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}, -\pi + \alpha/2,$
(6, 7)	$t(u), -\pi/2$	$M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}, -\alpha/2,$
(8, 9)	$t(u), \pi/2$	$M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}, \alpha/2,$
(10, 11)	$t(u), \pi/2$	$M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}, \pi - \alpha/2,$
(12, 13)	$m(u), \pi$	$M\sqrt{u}\sqrt{\{u+m(u)\}}, \pi,$
(4, 5)	...	$-M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}\{\overline{\varphi(u)} + i\overline{\psi(u)}\},$
(6, 7)	...	$M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}\{\overline{\varphi(u)} - i\overline{\psi(u)}\},$
(8, 9)	...	$M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}\{\overline{\varphi(u)} + i\overline{\psi(u)}\},$
(10, 11)	...	$-M\sqrt{u}\sqrt{r(u)}\{\overline{\varphi(u)} - i\overline{\psi(u)}\}.$

Die Beiträge (2, 3) und (12, 13) heben sich gegenseitig auf. Zusammenfassung aller verbliebenen Integrationsbeiträge führt zu

$$(1/2) \cdot L_{(\tau)}^{-1} \{\bar{A}(p)\} = m_1(x, \tau) = \begin{cases} 0 & \dots \tau \leq x\sqrt{c}, \\ h(x, \tau) & \dots \tau > x\sqrt{c} \end{cases} \quad (114)$$

mit

$$h(x, \tau) = \frac{2M}{\pi N} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{(a^2 - u^2)}} \{ \varphi \cdot \cos(Mx\psi\sqrt{u}) \cdot \cosh(\tau u - Mx\varphi\sqrt{u}) + \\ + \psi \cdot \sin(Mx\psi\sqrt{u}) \cdot \sinh(\tau u - Mx\varphi\sqrt{u}) \} du. \quad (115)$$

Wir wenden uns jetzt der Funktion  $B(p)$  zu und setzen zur Vereinfachung

$$m_2(x, \tau) = (1/4\pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{B}(p) e^{p\tau} dp. \quad (116)$$

Den Beziehungen (110), (111) und (112) entsprechen hier die Grenzwerte

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} s(p) = p(c-1)/(c+1), \quad (117)$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} B(p) = M\sqrt{p}\sqrt{p}\sqrt{\{2/(c+1)\}} = p, \quad (118)$$

$$\lim_{c \rightarrow 1} B(p) = \sqrt{p}\sqrt{(p-i/k)}. \quad (119)$$

Würde die Eindeutigkeit von  $\bar{B}(p)$  gemäß den Festsetzungen (109) festgelegt werden, wäre  $\bar{B}(p)$  entlang der elliptischen Bögen

$$p = \frac{1}{(1-N^2)} \left\{ -t \pm iN\sqrt{[a^2(1-N^2) - t^2]}, \right. \\ \left. 0 \leq t \leq a\sqrt{(1-N^2)} \right\} \quad (120)$$

nicht analytisch. Dies würde sich auf die Konturintegration ungünstig auswirken. Die Schwierigkeit kann vermieden werden, wenn der eindeutige Ast von  $\bar{B}(p)$  auf die folgende Weise definiert wird:



$$\left. \begin{aligned}
 p + a &= r_1 e^{i\alpha_1}; & p - a &= r_2 e^{i\alpha_2}; & -\pi < \alpha_1, \alpha_2 &\leq \pi, \\
 s(p) &= N \sqrt{\{(p+a)(p-a)\}} = N \sqrt{(r_1 \cdot r_2)} e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)/2}, \\
 p - s(p) &= R_2 \cdot e^{i\beta_2}; & p &= R e^{i\beta}; & -3\pi/2 < \beta, \beta_2 &\leq \pi/2, \\
 \sqrt{\{p - s(p)\}} &= \sqrt{R_2} \cdot e^{i\beta_2/2}; & \sqrt{p} &= \sqrt{R} \cdot e^{i\beta/2}, \\
 B(p) &= M \sqrt{p} \sqrt{\{p - s(p)\}} = M \sqrt{(R R_2)} \cdot e^{i(\beta + \beta_2)/2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Die durch (98) definierte Funktion besitzt wohl ebenfalls Verzweigungspunkte an den Stellen  $(0, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(+a, 0)$ ,  $(0, +ib)$  und  $(0, -ib)$ , ist aber überall analytisch mit Ausnahme der reellen Achse von  $-a$  bis  $+a$  und der imaginären Achse von  $-ib$  bis  $+ib$ . Die Kontur  $Br(1)$  kann somit durch die Kontur  $Br(3)$  ersetzt werden.

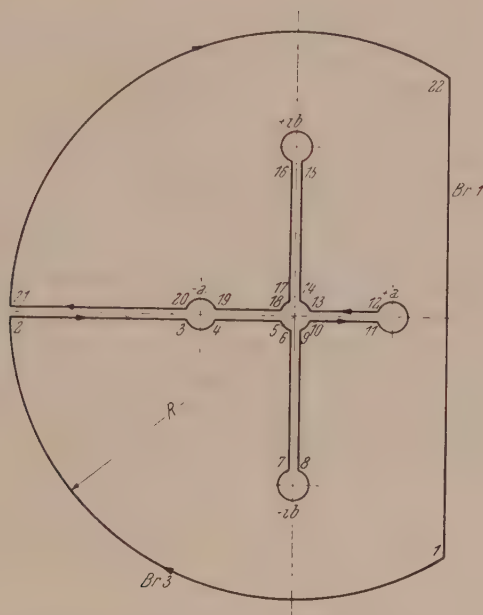


Abb. 2. Integrationsweg  $Br(3)$  für die Inversion von  $\bar{B}(p)$ .

Aus (118) folgt, daß  $m_2(x, \tau)$  für  $\tau < x$  verschwindet. Die den unendlichen Viertelkreisen (1, 2) und (21, 22) entsprechenden Integrationsbeiträge verschwinden wieder. Die Kontur  $Br(1)$  kann somit durch den Linienzug (2, 3, 4, ..., 20, 21) ersetzt werden. Die um die Verzweigungspunkte gelegten Kreise liefern verschwindende Beiträge. Die Integrationselemente der Funktion  $\bar{B}(p)$  sind zu erhöhter Übersichtlichkeit in der nachfolgenden Tabelle angeordnet.

Weg	$s(p)$	$B(p)$
(2, 3)	$m(u), -\pi$	$M \sqrt{u} \sqrt{\{u - m(u)\}}, -\pi,$
(4, 5)	$t(u), -\pi/2$	$-M \sqrt{u} \sqrt{\{\varphi(u) - i\psi(u)\}},$
(6, 7)	$n(u), -\pi/2$	$D(u), -\pi,$
(8, 9)	$n(u), -\pi/2$	$D(u), 0,$
(10, 11)	$t(u), -\pi/2$	$M \sqrt{u} \sqrt{\{\varphi(u) + i\psi(u)\}},$
(12, 13)	$t(u), \pi/2$	$M \sqrt{u} \sqrt{\{\varphi(u) - i\psi(u)\}},$

Weg	$s(p)$		$B(p)$	
(14, 15)	$n(u)$ ,	$\pi/2$	$D(u)$ ,	0,
(16, 17)	$n(u)$ ,	$\pi/2$	$D(u)$ ,	$-\pi$ ,
(18, 19)	$t(u)$ ,	$\pi/2$	$-M\sqrt{u}\{\varphi(u) + i\psi(u)\}$ ,	
(20, 21)	$m(u)$ ,	$\pi$	$M\sqrt{u}\sqrt{\{u - m(u)\}}$ ,	$-\pi$ .

Zusammenfassung aller nicht verschwindenden Integrationsbeiträge führt zu

$$(1/2) \cdot L_{(\tau)}^{-1} \{ \bar{B}(p) \} = m_2(x, \tau) = \begin{cases} 0 & \dots \tau < x, \\ -h(x, \tau) + g(x, \tau) & \dots \tau > x \end{cases} \quad (122)$$

mit

$$g(x, \tau) = \frac{2M^2}{\pi} \int_0^b \frac{\cosh[D(u) \cdot x]}{D(u)} \left\{ 1 - \frac{u}{N\sqrt{(u^2 + a^2)}} \right\} \cos(u\tau) du. \quad (123)$$

Das Biegemoment  $m(x, \tau)$  ist somit gegeben durch

$$m(x, \tau) = \frac{1}{2M^2} \cdot \begin{cases} 0 & \dots 0 < \tau \leq x, \\ g(x, \tau) - h(x, \tau) & \dots x < \tau \leq x\sqrt{c}, \\ g(x, \tau) & \dots x\sqrt{c} < \tau < \infty. \end{cases} \quad (124)$$

Gl. (124) stellt die nach der Biegetheorie von Timoshenko hergeleitete exakte Lösung des Biegestoßproblems dar. Sie bezieht sich auf den idealisierten Grenzfall des mathematischen Stoßes. Lösungen für den physikalischen Stoß können daraus nach den Duhamelschen Integralsätzen aufgebaut werden. Die Lösung (124) geht für  $c \rightarrow 1$  in die auf wesentlich einfacherem Wege abgeleitete Lösung (59) über. Man hat mit  $d(u) = \sqrt{u}\sqrt{(1/k - u)}$  für  $c = 1$

$$m(x, \tau) = (1/4\pi) \int_0^{1/k} \cos(u\tau) \frac{\{e^{d(u)x} + e^{-d(u)x}\}}{d(u)} (1 - ku) du. \quad (125)$$

Führt man die Funktionen

$$D(u, x) = \{e^{d(u)x} + e^{-d(u)x}\} d(u), \quad (126)$$

$$\left. \begin{aligned} R(x, \tau) &= \int_0^{1/k} D(u, x) \cos(u\tau) du, \\ S(x, \tau) &= \int_0^{1/k} D(u, x) \sin(u\tau) du \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

ein, ist  $m(x, \tau) = (1/4\pi) \{R(x, \tau) - kS_\tau(x, \tau)\}$  und

$$\begin{aligned} R(x, \tau) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\{(\tau/2)k(1 + \sin\alpha)\} (e^{(x/2)k \cos\alpha} + e^{-(x/2)k \cos\alpha}) d\alpha = \\ &= 2 \cdot \cos(\tau/2 k) \int_0^{\pi} \cos\{(\tau/2)k \sin\alpha\} e^{(x/2)k \cos\alpha} d\alpha = \\ &= 2\pi \cos(\tau/2 k) \cdot J_0\{1/[2k\sqrt{(\tau^2 - x^2)}]\}, \end{aligned} \quad (128)$$

$$S(x, \tau) = 2\pi \sin(\tau/2 k) \cdot J_0\{1/[2k\sqrt{(\tau^2 - x^2)}]\}. \quad (129)$$

Geht man aber von  $S(x, \tau)$  zu  $S_\tau(x, \tau)$  über, erhält man das Biegemoment  $m(x, \tau)$  des Spezialfalles  $c = 1$  in voller Übereinstimmung mit (59).

## VI. Zahlenmäßige Auswertung der Lösungen

Die numerische Auswertung der speziellen Lösung für  $c = 1$  ergibt äußerst scharfe Schwingungen, die rasch abklingen und für  $\tau \rightarrow \infty$  verschwinden. Biegeschwingungen setzen erst im Zeitpunkt  $\tau = x$  ein und nicht schon im Zeitpunkt der Impulsüber-

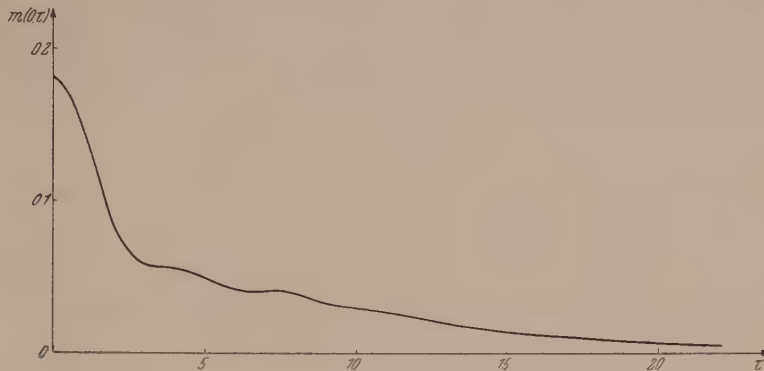


Abb. 3. Variation des Biegemomentes für den mathematischen Stoß an der Stelle  $x = 0$  ( $c = 3$ )

tragung ( $\tau = 0$ ). Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist  $\sqrt{E/\rho}$ . Zur Lösung des allgemeinen Falles wurde  $c = E/\lambda G$  mit 3 festgesetzt, in der Absicht, an geeigneter Stelle auch noch Berechnungen für  $c = 4$  ausführen zu können.  $c$  liegt für

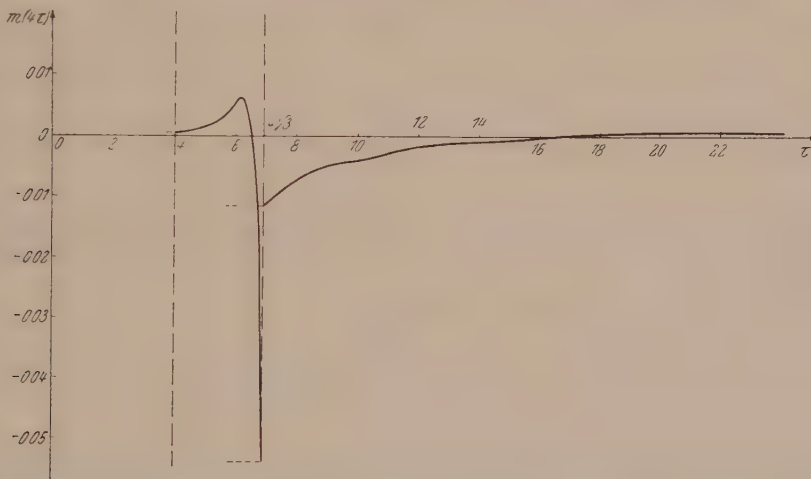


Abb. 4. Variation des Biegemomentes für den mathematischen Stoß an der Stelle  $x = 4$  ( $c = 3$ )

die meisten theoretisch interessierenden Materialien zwischen 3 und 4. Numerische Berechnungen wurden für quadratischen Stabquerschnitt und die Stabstationen  $x = 0, 4, 8$  durchgeführt. Ergebnisse sind in den Abb. 3, 4 und 5 wiedergegeben. Die Lösung für  $x = 0$  hat nur bedingte Bedeutung, da die Biegetheorie von Timoshenko die unmittelbar unter der Last auftretenden Spannungen aus naheliegenden Gründen nicht voraussagen kann. Die Überlagerung zweier Wellen verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeiten tritt für  $x = 4$  und 8 deutlich hervor. Die schnellere Welle, die eigentliche Biegewelle, trifft im Zeitpunkt  $\tau = x$  an der Stelle  $x$  ein, die langsamere, die eigentliche Schubspannungswelle, erst zur Zeit  $\tau = x/\bar{c}$ . In physikalischen Dimensionen handelt es sich hier um die Geschwindigkeiten  $\sqrt{E/\rho}$  und



$\sqrt{(\lambda G/q)}$ . Die den Zeitpunkten  $\tau = x$  und  $\tau = x\sqrt{c}$  entsprechenden Diskontinuitäten sind nur für den mathematischen Stoß charakteristisch. Sie verschwinden im Fall eines physikalischen Stoßes. Die Amplituden nehmen rasch ab. Das Biegemoment verschwindet für  $\tau \rightarrow \infty$ .

Zur zahlenmäßigen Auswertung der Lösungen mußten besondere Verfahren entwickelt werden, da es sich grundsätzlich um zwei Schwierigkeiten handelt: a) die Integranden besitzen Singularitäten vom Typus  $1/\sqrt{u}$ ; b) einige der Integrale sind

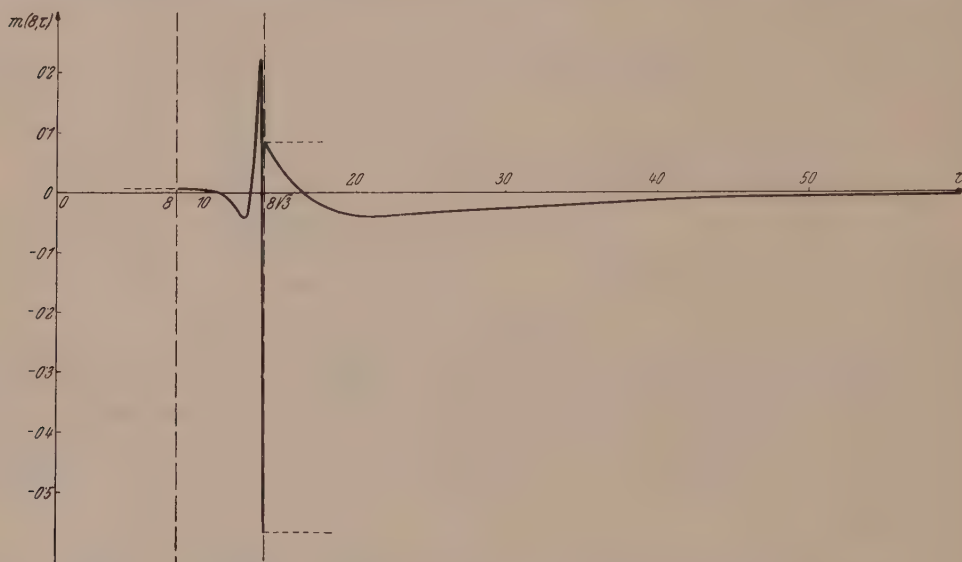


Abb. 5. Variation des Biegemomentes für den mathematischen Stoß an der Stelle  $x = 8$  ( $c = 3$ )

vom oszillierenden Typus  $\int_{q-h}^{q+h} e^{iut} f(t) dt$  und für verschiedene und auch große Werte von  $u$  verlangt.

Die Integrale der Art a sind von der Form

$$L = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u} \sqrt{1-u}} h(u) \cosh(\lambda \tau u) du. \quad (130)$$

Ist  $h(u)$  eine im abgeschlossenen Intervall  $(0, 1)$  stetige Funktion, lassen sich die an den Stellen  $u = 0$  und  $u = 1$  vorhandenen Singularitäten in der folgenden Weise beseitigen:

$$\begin{aligned} L = & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-u}} [h(u) - h(1)] - [h(0) - h(1)] \right\} \cosh(\lambda \tau u) du + \\ & + h(1) \int_0^1 \frac{1}{(1/\sqrt{u} - 1) [1/\sqrt{1-u} - 1]} \cosh(\lambda \tau u) du + \\ & + h(0) \int_0^1 [1/\sqrt{u}] \cdot \cosh(\lambda \tau u) du + h(1) \int_0^1 [1/\sqrt{1-u}] \cdot \cosh(\lambda \tau u) du - \\ & - h(1) \int_0^1 \cosh(\lambda \tau u) du. \end{aligned} \quad (131)$$

Die in (131) noch enthaltenen Singularitäten verschwinden durch partielle Integration:

$$\int_0^1 (1/\sqrt{u}) \cdot \cosh(\lambda \tau u) du = -2 \cdot \cosh(\lambda \tau) + 2 \lambda \tau \int_0^1 \sqrt{u} \cdot \sinh(\lambda \tau u) du, \quad (132)$$

$$\int_0^1 [1/\sqrt{(1-u)}] \cdot \cosh(\lambda \tau u) du = +2 + 2 \lambda \tau \int_0^1 \sqrt{(1-u)} \cdot \sinh(\lambda \tau u) du. \quad (133)$$

Integrale der Art b können auf die folgende Weise gelöst werden. Man setzt

$$F(t) = A + B e^{\alpha(t-q)} \quad (134)$$

und fordert von der Näherung  $F(t)$ , daß  $F(q-h) = f(q-h)$ ,  $F(q) = f(q)$  und  $F(q+h) = f(q+h)$  ist. Die noch unbekannten Koeffizienten  $\alpha$ ,  $A$  und  $B$  ergeben sich sodann als

$$e^{\alpha h} = \{f(q+h) - f(q)\} / \{f(q) - f(q-h)\}, \quad (135)$$

$$A = \{e^{\alpha h} \cdot f(q-h) - f(q)\} / (e^{\alpha h} - 1), \quad (136)$$

$$B = \{f(q) - f(q-h)\} e^{\alpha h} / (e^{\alpha h} - 1). \quad (137)$$

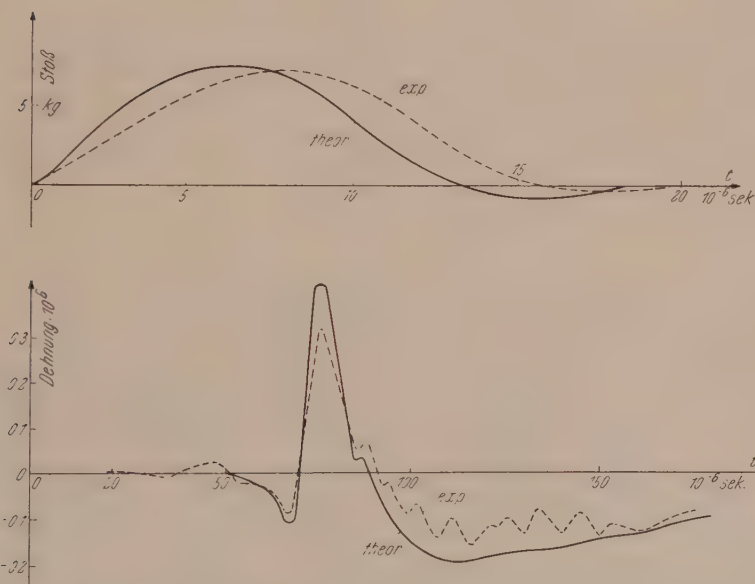


Abb. 6. Variation des Biegemomentes für den physikalischen Stoß an der Stelle  $x = 4$ . Vergleich von Theorie und Experiment ( $c = 3$ )

Daraus folgt als Näherung

$$\int_{q-h}^{q+h} e^{iut} f(t) dt = \left\{ (2A/u) \cdot \sin(uh) + \frac{B(\alpha - iu)}{u^2 + \alpha^2} [e^{\alpha h} \cdot e^{iuh} - e^{-\alpha h} \cdot e^{-iuh}] \right\} e^{iuq}. \quad (138)$$

Der Fehler  $E$  kann durch

$$E \leq \left| \int_q^{q+h} f(t) dt - \int_{q-h}^q f(t) dt - \left\{ \frac{h \{f(q+h) + f(q-h) - 2f(q)\}}{\log \{1 + [f(q+h) + f(q-h) - 2f(q)]/[f(q) - f(q-h)]\}} \right\} \right| \quad (139)$$

abgeschätzt werden. Es gilt  $E \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow 0$  und auch  $E \rightarrow 0$  für  $q \rightarrow 0$ .

## VII. Vergleich mit dem Experiment

Die Gültigkeit der theoretischen Schlußfolgerungen wurde durch parallel durchgeführte Experimente überprüft<sup>9</sup>. Die in den Abb. 6 und 7 enthaltenen experimentellen Vergleichskurven sind <sup>9</sup> entnommen. Die theoretischen Kurven wurden aus den Kurven der Abb. 4 und 5 nach dem Duhamelschen Superpositionsprinzip abgeleitet. Für weitere Vergleichskurven und experimentelle Einzelheiten wird auf <sup>9</sup> verwiesen.

Aus dem Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnisse ergibt sich ein befriedigendes Maß an Übereinstimmung. Der einzige ausgeprägte Unterschied besteht in der den experimentellen Kurven aufgeprägten Hochfrequenzschwingung geringer Amplitude, die den theoretischen Kurven fehlt. Die Natur dieser Sekundär-

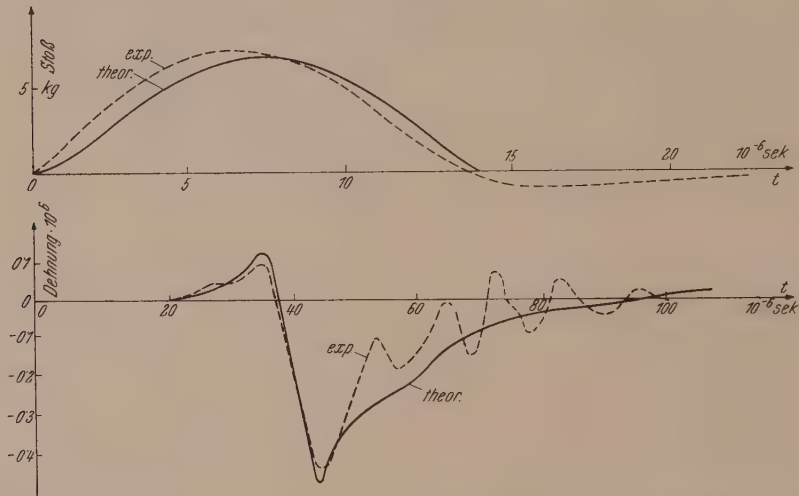


Abb. 7. Variation des Biegemomentes für den physikalischen Stoß an der Stelle  $x = 8$ . Vergleich von Theorie und Experiment ( $c = 3$ )

schwingungen konnte nicht geklärt werden. Die Amplitude dieser Hochfrequenzschwingungen schien mit wachsendem  $x$  sehr rasch abzunehmen. Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment bezieht sich vor allem auf den mittleren Verlauf der Dehnung mit der Zeit. Insbesondere stimmen die Zeitpunkte der Extrema auffallend gut überein. Auch dem Betrag nach stimmen die Extremwerte gut überein. Die theoretischen Werte scheinen etwas größer zu sein als die experimentellen und der Unterschied scheint mit wachsendem  $x$  langsam zuzunehmen. Dieser Umstand ließe sich daraus erklären, daß in der zugrunde liegenden Theorie die strukturelle Dämpfung des Materials vernachlässigt wurde.

## VIII. Die Differentialgleichungen für die Ausbreitung von Stoßwellen in elastischen Platten. Zurückführung auf eine einzige Wellengleichung

Die bisherigen Untersuchungen haben sich auf den Stab beschränkt und durch Vergleich von Theorie und Experiment nachzuweisen versucht, daß die Biegetheorie von Timoshenko verhältnismäßig gut instande ist, die durch Querstöße zur Auslösung gebrachte elastische Wellenausbreitung zu beschreiben. Es handelt sich jetzt darum, die Theorie vom eindimensionalen zum zweidimensionalen elastischen Medium auszudehnen. Besondere Aufmerksamkeit soll dem Spezialfall radialer Symmetrie zugewendet werden. Es soll sich um eine elastische Platte von unendlicher Ausdehnung handeln, die sich in einem schwerelosen Felde befindet und in ihrem Mittelpunkt



von einem quergerichteten mathematischen Stoß getroffen wird. Die Biegetheorie von Timoshenko<sup>3, 4</sup> wurde von Mindlin<sup>6</sup> vom elastischen Stab auf die elastische Platte ausgedehnt. Die Grundgleichungen für die zweidimensionale elastische Wellenausbreitung mögen in engem Anschluß daran in zusammenfassender Form dargestellt werden.

Die Plattendicke sei  $h$ . Der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befinde sich in der Symmetrieebene der Platte. Zwei senkrechte Richtungen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  mögen in der Symmetrieebene liegen, die  $\bar{z}$ -Achse weise senkrecht darauf, einem rechthändigen Koordinatensystem entsprechend. Werden die unter der Einwirkung äußerer und innerer Kräfte zustande kommenden Verschiebungen in den  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtungen mit  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{w}$  bezeichnet, können die folgenden Beziehungen aufgestellt werden:

$$\bar{u} = \bar{z} \cdot \xi(\bar{x}, \bar{y}, t); \quad \bar{v} = \bar{z} \cdot \eta(\bar{x}, \bar{y}, t); \quad \bar{w} = \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, t). \quad (140)$$

Bedeutet  $D = E h^3/12 (1 - \mu^2)$  den Biegemodul, so sind die Komponenten des Biegemomentes durch

$$\left. \begin{aligned} M^\xi &= D (\xi_{\bar{x}} + \mu \eta_{\bar{y}}), \\ M^\eta &= D (\eta_{\bar{y}} + \mu \xi_{\bar{x}}), \\ M^{\xi\eta} &= D/2 (1 - \mu) \cdot (\eta_{\bar{x}} + \xi_{\bar{y}}) \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

gegeben. Die Komponenten der Querkraft hingegen sind

$$Q^\xi = \lambda G h (\bar{w}_{\bar{x}} + \xi); \quad Q^\eta = \lambda G h (\bar{w}_{\bar{y}} + \eta). \quad (142)$$

Bedeutet  $\bar{q}$  die äußere Kraft pro Flächeneinheit, nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an:

$$Q_{\bar{x}}^\xi + Q_{\bar{y}}^\eta + \bar{q} = h \varrho \cdot \bar{w}_{tt}, \quad (143)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{\bar{x}}^\xi - M_{\bar{x}}^\xi - M_{\bar{y}}^{\xi\eta} &= -h^3 \varrho/12 \cdot \xi_{tt}, \\ Q_{\bar{y}}^\eta - M_{\bar{y}}^\eta - M_{\bar{x}}^{\xi\eta} &= -h^3 \varrho/12 \cdot \eta_{tt}. \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Verbindung der Gl. (143) und (144) mit den Gl. (141) und (142) führt zur Elimination der Querkräfte und Biegemomente:

$$\lambda G h \{(\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}}) + (\xi_{\bar{x}} + \eta_{\bar{y}})\} + \bar{q} = \varrho h \cdot \bar{w}_{tt}, \quad (145)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda G h (\bar{w}_{\bar{x}} + \xi) - D/2 (1 - \mu) \cdot (\xi_{\bar{x}\bar{x}} + \xi_{\bar{y}\bar{y}}) - D/2 (1 + \mu) \cdot (\eta_{\bar{x}\bar{x}} + \eta_{\bar{y}\bar{x}}) &= -\varrho h^3/12 \cdot \xi_{tt}, \\ \lambda G h (\bar{w}_{\bar{y}} + \eta) - D/2 (1 - \mu) \cdot (\eta_{\bar{x}\bar{x}} + \eta_{\bar{y}\bar{y}}) - D/2 (1 + \mu) \cdot (\xi_{\bar{x}\bar{y}} + \eta_{\bar{y}\bar{y}}) &= -\varrho h^3/12 \cdot \eta_{tt}. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Um die Gl. (145) und (146) auf polare Koordinaten zu transformieren, setzt man

$$\xi = \bar{\psi}(\bar{r}, t) \cos \alpha, \quad \eta = \bar{\psi}(\bar{r}, t) \sin \alpha \quad (147)$$

und geht zu  $\alpha \rightarrow 0$  über. Damit ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\bar{x}} &= \bar{\psi}_{\bar{r}} \cos^2 \alpha + \bar{\psi} \{1/\bar{r} - \bar{x} \cos \alpha/r^2\}, \\ \eta_{\bar{y}} &= \bar{\psi}_{\bar{r}} \sin^2 \alpha + \bar{\psi} \{1/\bar{r} - \bar{y} \sin \alpha/r^2\}, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$$\xi_{\bar{x}} + \eta_{\bar{y}} = \bar{\psi}_{\bar{r}} + \bar{\psi}/\bar{r}, \quad (149)$$

$$\xi_{\bar{x}\bar{x}} + \eta_{\bar{y}\bar{y}} = \bar{\psi}_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\psi}_{\bar{r}}/\bar{r} - \bar{\psi}/\bar{r}^2. \quad (150)$$

Die Anzahl der Bewegungsgleichungen ist von drei auf zwei reduziert worden. Sie nehmen die Form an:

$$\lambda G h \{(\bar{w}_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{w}_{\bar{r}}/\bar{r}) + (\bar{\psi}_{\bar{r}} + \bar{\psi}/\bar{r})\} + H/2 \pi r = \varrho h \cdot \bar{w}_{tt}, \quad (151)$$

$$\lambda G h \cdot (\bar{w}_{\bar{r}} + \bar{\psi}) - D (\bar{\psi}_{\bar{r}} + \bar{\psi}/\bar{r})_{\bar{r}} = -\varrho h^3/12 \cdot \bar{\psi}_{tt}. \quad (152)$$

Die äußere Kraft pro Flächeneinheit  $\bar{q}$  ist gemäß  $\bar{H}(\bar{r}, t) = 2\pi \bar{r} \cdot \bar{q}(\bar{r}, t)$  durch die äußere Kraft pro Einheit des radialen Abstandes ersetzt worden. Die Analogie zwischen den Grundgleichungen des Stabes und der Platte tritt deutlich hervor. Das hier auftretende  $\bar{\psi}$  entspricht dem  $-\varphi$  des Stabes.

Gl. (145) und (146) können zu einer einzigen für die totale Auslenkung ( $w$ ) der Platte verbunden werden:

$$\begin{aligned} \{\Delta - (\varrho/\lambda G) \partial_{tt}^2\} \cdot \{D \cdot \Delta - (\varrho h^3/12) \partial_{tt}^2\} \bar{w} + \varrho h \cdot \bar{w}_{tt} = \\ = \{1 - D \cdot \Delta / \lambda G h + (\varrho/\lambda G) (h^2/12) \partial_{tt}^2\} \bar{q}. \end{aligned} \quad (153)$$

Wird der Einfluß der Rotationsträgheit vernachlässigt, reduziert sich Gl. (153) auf

$$D \{\Delta - (\varrho/\lambda G) \partial_{tt}^2\} \Delta \bar{w} + \varrho h \cdot \bar{w}_{tt} = (1 - D \cdot \Delta / \lambda G h) \bar{q}. \quad (154)$$

Wird indessen die transversale Schubdehnung vernachlässigt, erhält man die Gleichung

$$\{D \cdot \Delta - (\varrho h^3/12) \partial_{tt}^2\} \Delta \bar{w} + \varrho h \cdot \bar{w}_{tt} = \bar{q}. \quad (155)$$

Werden schließlich beide Sekundäreinflüsse, Rotationsträgheit und Schubdehnung, außer Betracht gelassen, reduziert sich Gl. (153) auf die bekannte klassische Differentialgleichung für die Biegeschwingungen einer elastischen Platte:

$$D (\Delta \Delta \bar{w}) + \varrho h \cdot \bar{w}_{tt} = \bar{q}. \quad (156)$$

Man könnte versuchen, durch Elimination von  $\bar{\psi}$  aus den Gl. (151) und (152) eine einzige Differentialgleichung für die totale Auslenkung  $\bar{w}$  in polaren Koordinaten herzuleiten. Dies bringt Schwierigkeiten mit sich. Eine andere Möglichkeit ist die folgende: Man transformiert die Differentialoperatoren  $\Delta$  und  $\Delta \Delta$  von kartesischen Koordinaten auf polare und wendet sie sodann auf Gl. (153) an. Nach polaren Koordinaten  $x = r \cdot \cos \alpha$ ,  $y = r \cdot \sin \alpha$  transformiert, geht der Laplacesche Operator  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  über in

$$\Delta(r, \alpha) = \partial_{rr} + (1/r) \partial_r + (1/r^2) \partial_{\alpha\alpha}. \quad (157)$$

Analog geht der Operator  $\Delta \cdot \Delta = \Delta^2$  über in

$$\begin{aligned} \Delta(r, \alpha) \cdot \Delta(r, \alpha) = \{\Delta(r, \alpha)\}^2 = \{\partial_{rr} + (1/r) \partial_r + (1/r^2) \partial_{\alpha\alpha}\} \Delta(r, \alpha) = \\ = \partial_{rrrr} + (2/r^2) \partial_{rr\alpha\alpha} + (1/r^4) \partial_{\alpha\alpha\alpha\alpha} + (2/r) \partial_{rrr} - (2/r^3) \partial_{r\alpha\alpha} - \\ - (1/r^2) \partial_{rr} + (4/r^4) \partial_{\alpha\alpha} + (1/r^3) \partial_r. \end{aligned} \quad (158)$$

Daraus folgt für radiale Symmetrie

$$\Delta(r) = \partial_{rr} + (1/r) \partial_r, \quad (159)$$

$$\{\Delta(r)\}^2 = \partial_{rrrr} + (2/r) \partial_{rrr} - (1/r^2) \partial_{rr} + (1/r^3) \partial_r. \quad (160)$$

Die Wellengleichung (153) nimmt damit die Form an:

$$\begin{aligned} E h^3/12 (1 - \mu^2) \cdot \left\{ \bar{w}_{rrrr} + \frac{2}{r} \bar{w}_{rrr} - \frac{1}{r^2} \bar{w}_{rr} + \frac{1}{r^3} \bar{w}_r \right\} - \\ - (\varrho h^3/12) \{1 + c/(1 - \mu^2)\} \left\{ \bar{w}_{rrt} + \frac{1}{r} \bar{w}_{rt} \right\} + (\varrho^2 h^3/12) (c/E) \bar{w}_{tttt} + \varrho h \bar{w}_{tt} = \\ = \bar{q} + (c/E) (h^2/12) \bar{q}_{tt} - (h^2/12) c/(1 - \mu^2) \cdot \{\bar{q}_{rr} + (1/r) \bar{q}_r\}. \end{aligned} \quad (161)$$

## IX. Lösung der Wellengleichung für die Ausbreitung von Biegewellen in elastischen Platten für den transversalen mathematischen Stoß und radiale Symmetrie

Führt man durch

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= h r; & t &= h \sqrt{(\varrho/E)} \cdot \tau; & E/\lambda G &= c, \\ \bar{w}(r, t) &= h \cdot w(r, \tau); & \bar{\psi}(\bar{r}, t) &= \psi(r, \tau), \\ \bar{q}(\bar{r}, t) &= E \cdot q(r, \tau); & \bar{H}(\bar{r}, t) &= E \cdot H(r, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

dimensionslose Größen ein, verwandeln sich die Bewegungsgleichungen (151) und (152) in

$$(w_{rr} + w_r/r) + (\psi_r + \psi/r) + c H/2 r \pi = c \cdot w_{\tau\tau}, \quad (163)$$

$$(w_r + \psi) - \{c/12 (1 - \mu^2)\} (\psi_r + \psi/r)_r = -c/12 \cdot \psi_{\tau\tau}. \quad (164)$$

Für Biegemoment und Querkraft erhält man

$$M(\bar{r}, t) = D(\bar{\psi}_r + \bar{\psi}/\bar{r}) = (D/h)(\psi_r + \mu \psi/r), \quad (165)$$

$$Q(\bar{r}, t) = \lambda G h (\bar{w}_r + \bar{\psi}) = \lambda G h (w_r + \psi). \quad (166)$$

Sowohl vom mathematischen Standpunkt aus als auch in der Perspektive der zugrunde liegenden physikalischen Realität erweist sich hier eine Unterscheidung zwischen reiner Biegung und reiner Schubdehnung als vorteilhaft. Man setzt demgemäß

$$w(r, \tau) = u(r, \tau) + v(r, \tau); \quad \psi(r, \tau) = -u_r(r, \tau). \quad (167)$$

Für den mathematischen Stoß gelten aus Symmetriegründen die Randbedingungen

$$u_r(0, \tau) = v_r(0, \tau) = u(\infty, \tau) = v(\infty, \tau) = 0. \quad (168)$$

Unter Verwendung der Beziehungen (167) gehen die Gl. (163) und (164) über in

$$c u_{\tau\tau} + c v_{\tau\tau} - (v_{rr} + v_r/r) = c H/2 r \pi, \quad (169)$$

$$(a c/12) \cdot (u_{rr} + u_r/r) + v_r - (c/12) \cdot u_{r\tau\tau} = 0. \quad (170)$$

Es ist  $a = 1/(1 - \mu^2)$ . Die äußere Kraft pro Einheit des radialen Abstandes ( $H$ ) soll in Analogie zur Behandlung des Stabes durch

$$H(r, \tau) = \delta(r) \cdot \delta(\tau) = 2\pi r \cdot q(r, \tau) \quad (171)$$

in die Rechnung eingeführt werden. Die gesamte auf die Platte übertragene Impuls-  
menge ist gegeben durch

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty q(r, \tau) r dr du d\tau = \int_0^\infty \int_0^\infty H(r, t) dr d\tau = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(r) \cdot \delta(\tau) dr d\tau = 1. \quad (172)$$

Zur Lösung der Gl. (169) und (170) sollen zwei aufeinanderfolgende Laplacesche Transformationen herangezogen werden; die erste möge sich auf die Zeit  $\tau$ , die zweite sich auf die Raumkoordinate  $r$  beziehen. Es wird demnach gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} U(r, p) &= \int_0^\infty e^{-p\tau} u(r, \tau) d\tau = L_{(\tau)}\{u(r, \tau)\}, \\ V(r, p) &= \int_0^\infty e^{-p\tau} v(r, \tau) d\tau = L_{(\tau)}\{v(r, \tau)\}. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Die Bewegungsgleichungen (169) und (170) erscheinen sodann in der transformierten Gestalt

$$c p^2 (U + V) - (V_{rr} + V_r/r) = c/2 r \pi \cdot \delta(r), \quad (174)$$

$$(a c/12) (U_{rr} + U_r/r)_r + V_r - (c p^2/12) \cdot U_r = 0. \quad (175)$$

Die Randbedingungen (168) gehen über in

$$U_r(0, p) = V_r(0, p) = U(\infty, p) = V(\infty, p) = 0. \quad (176)$$

Es werden nun Laplacesche Transformationen in bezug auf  $r$  eingeführt:

$$\varphi(q, p) = \int_0^\infty e^{-rq} U(r, p) dr = L_{(r)}\{U(r, p)\}, \quad (177)$$

$$\psi(q, p) = \int_0^\infty e^{-rq} V(r, p) dr = L_{(r)}\{V(r, p)\}. \quad (178)$$



Schreibt man zur Vereinfachung der Darstellung  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  und  $\psi'$ ,  $\psi''$  für die auf  $q$  bezogenen Differentialquotienten von  $\varphi$  und  $\psi$  und macht man von der Beziehung

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \cdot d^n g/dp^n \leftrightarrow L\{f(t)\} = g(p) \quad (179)$$

Gebrauch, gehen die Gl. (174) und (175) über in

$$q\psi + q^2\psi' - c p^2(\varphi' + \psi') = c/2\pi, \quad (180)$$

$$\begin{aligned} 3\{a c/12\} q\varphi + 2\psi' + 5\{a c/12\} q^2\varphi' - 2\{c/12\} p^2\varphi' + \\ + q\psi'' + \{a c/12\} q^3\varphi'' - \{c/12\} p^2 q\psi'' = 0. \end{aligned} \quad (181)$$

Denkt man sich jetzt die zweifach transformierten Lösungen  $\varphi(q, p)$  und  $\psi(q, p)$  als unendliche Potenzreihen und setzt man demnach

$$\varphi(q, p) = \sum_0^\infty \alpha_n(p) \cdot q^n; \quad \psi(q, p) = \sum_0^\infty \beta_n(p) \cdot q^n, \quad (182)$$

reduzieren sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen (180) und (181) auf ein unendliches System linearer algebraischer Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten  $\alpha_n(p)$  und  $\beta_n(p)$ :

$$n\beta_{n-1}(p) - c p^2(n+1)\{\alpha_{n+1}(p) + \beta_{n+1}(p)\} = \begin{cases} c/2\pi \dots n=0, \\ 0 \dots n=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (183)$$

$$\begin{aligned} (n+1)\beta_{n+1}(p) - \{c p^2/12\}(n+1)\alpha_{n+1}(p) + \{a c/12\}n\alpha_{n-1}(p) = 0. \\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \quad (184)$$

Es ist  $\alpha_{-1}(p) = \beta_{-1}(p) = 0$ . Löst man die Gl. (183) und (184) für  $\alpha_n(p)$  und  $\beta_n(p)$ , erhält man das folgende System von Beziehungen:

$$\alpha_{n+1}(p) = \frac{\{a c/12\}\alpha_{n-1}(p) + \{1/c p^2\}\beta_{n-1}(p)}{[(n+1)/n](1 + c p^2/12)}, \quad (185)$$

$$\beta_{n+1}(p) = \frac{\{1/12\}\beta_{n-1}(p) - \{a c/12\}\alpha_{n-1}(p)}{[(n+1)/n](1 + c p^2/12)}. \quad (186)$$

Die Gl. (185) und (186) gelten für  $n > 1$ , während die Funktionen  $\alpha_1(p)$  und  $\beta_1(p)$  direkt aus den Gl. (183) und (184) zu ermitteln sind. Die Funktionen  $\alpha_0(p)$  und  $\beta_0(p)$  bleiben zunächst noch unbestimmt. Wir setzen zur Vereinfachung der Schreibweise

$$f(p) = 1 + c p^2/12. \quad (187)$$

Die ersten fünf Koeffizienten der Reihenentwicklungen für  $\varphi(q, p)$  und  $\psi(q, p)$  lauten sodann:

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_0(p) \text{ und } \beta_0(p): \text{ unbestimmt,} \\ &\alpha_1(p) = -\frac{1}{2\pi p^2 \cdot f(p)}; \quad \beta_1(p) = -\frac{c}{24\pi \cdot f(p)}, \\ &\alpha_2(p) = \frac{\{a c/12\}\alpha_0 + \{1/c p^2\}\beta_0}{(2/1) \cdot f(p)}, \\ &\beta_2(p) = \frac{\beta_0 - a c \alpha_0}{(2/1) 12 f(p)}, \\ &\alpha_3(p) = -\frac{(1 + a c)}{(3/2) 24\pi p^2 \cdot [f(p)]^2}, \\ &\beta_3(p) = \frac{c(a/p^2 - 1/12)}{(3/2) 24\pi \cdot [f(p)]^2}, \\ &\alpha_4(p) = \frac{a c [\{a c/12\}\alpha_0 + \{1/c p^2\}\beta_0] + \{1/c p^2\}(\beta_0 - a c \alpha_0)}{(4/3) 24 \cdot [f(p)]^3}, \\ &\beta_4(p) = \frac{\{1/12\}(\beta_0 - a c \alpha_0) - a c [\{a c/12\}\alpha_0 + \{1/c p^2\}\beta_0]}{(4/3) 24 [f(p)]^3}. \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

Zur weiteren Rechnung werden Funktionen  ${}_1\alpha_n(p)$ ,  ${}_2\alpha_n(p)$ ,  ${}_1\beta_n(p)$  und  ${}_2\beta_n(p)$  eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n(p) &= {}_1\alpha_n(p) \alpha_0(p) + {}_2\alpha_n(p) \beta_0(p), \\ \beta_n(p) &= {}_1\beta_n(p) \alpha_0(p) + {}_2\beta_n(p) \beta_0(p). \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

$n$  sei auf geradzahlige Werte beschränkt. Die Reihenentwicklungen (182) können sodann dargestellt werden durch

$$\left. \begin{aligned} \varphi(q, p) &= \alpha_0(p) \overset{1}{\varphi}(q, p) + \beta_0(p) \overset{2}{\varphi}(q, p) + \overset{3}{\varphi}(q, p), \\ \psi(q, p) &= \alpha_0(p) \overset{1}{\psi}(q, p) + \beta_0(p) \overset{2}{\psi}(q, p) + \overset{3}{\psi}(q, p), \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

wobei definitionsgemäß:

$$\left. \begin{aligned} \overset{1}{\varphi}(q, p) &= \sum_1^{\infty} \{ {}_1\alpha_{2n}(p) \cdot q^{2n} \} + 1, \\ \overset{2}{\varphi}(q, p) &= \sum_1^{\infty} \{ {}_2\alpha_{2n}(p) \cdot q^{2n} \}, \\ \overset{3}{\varphi}(q, p) &= \sum_0^{\infty} \{ \alpha_{2n+1}(p) \cdot q^{2n+1} \}, \\ \overset{1}{\psi}(q, p) &= \sum_1^{\infty} \{ \beta_{2n}(p) \cdot q^{2n} \}, \\ \overset{2}{\psi}(q, p) &= \sum_1^{\infty} \{ {}_1\beta_{2n}(p) \cdot q^{2n} \} + 1, \\ \overset{3}{\psi}(q, p) &= \sum_0^{\infty} \{ {}_2\beta_{2n+1}(p) \cdot q^{2n+1} \} \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

ist und wo alle Koeffizienten mit einziger Ausnahme von  $\alpha_0(p)$  und  $\beta_0(p)$  durch den mit den Gl. (183) bis (188) definierten rekursiven Prozeß bestimmt werden können.  $\alpha_0(p)$  und  $\beta_0(p)$  werden zur ersten Inversion nicht benötigt. Die Reihenentwicklungen (182) besitzen verhältnismäßig günstige Konvergenzeigenschaften, sogar für bescheiden große Werte von  $p$ . Vom Standpunkt der numerischen Auswertung würden somit nur wenige Glieder benötigt werden. Die Funktionen  $U(r, p)$  und  $V(r, p)$  können als Inversionen der Funktionen  $\varphi(q, p)$  und  $\psi(q, p)$  dargestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} U(r, p) &= L_{(r)}^{-1} \{ \varphi(q, p) \} = (1/2 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{qr} \varphi(q, p) dq, \\ V(r, p) &= L_{(r)}^{-1} \{ \psi(q, p) \} = (1/2 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{qr} \psi(q, p) dq. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Führt man hier Funktionen

$$\left. \begin{aligned} \overset{s}{U}(r, p) &= L_{(r)}^{-1} \{ \overset{s}{\varphi}(q, p) \} = (1/2 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{qr} \overset{s}{\varphi}(q, p) dq, \\ \overset{s}{V}(r, p) &= L_{(r)}^{-1} \{ \overset{s}{\psi}(q, p) \} = (1/2 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{qr} \overset{s}{\psi}(q, p) dq \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

ein, und zwar für  $s = 1, 2, 3$ , erscheinen die Inversionen  $U(r, p)$  und  $V(r, p)$  in der Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} U(r, p) &= \alpha_0(p) \overset{1}{U}(r, p) + \beta_0(p) \overset{2}{U}(r, p) + \overset{3}{U}(r, p), \\ V(r, p) &= \alpha_0(p) \overset{1}{V}(r, p) + \beta_0(p) \overset{2}{V}(r, p) + \overset{3}{V}(r, p). \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

Die Funktionen  $\alpha_0(p)$  und  $\beta_0(p)$  müssen nun aus den Randbedingungen  $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r, p) = 0$  und  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, p) = 0$  numerisch ermittelt werden. Die endgültigen Lösungen ergeben sich durch nochmalige Inversion:

$$\left. \begin{aligned} u(r, \tau) &= L_{(\tau)}^{-1} \{U(r, p)\} = (1/2 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{p\tau} U(r, p) dp, \\ v(r, \tau) &= L_{(\tau)}^{-1} \{V(r, p)\} = (1/2 \pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{p\tau} V(r, p) dp. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Biegemoment und Querkraft schließlich sind durch

$$\left. \begin{aligned} M(\bar{r}, t) &= -(D/h) (u_{rr} + \mu u_r/r), \\ Q(\bar{r}, t) &= \lambda G h \cdot v_r \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

bestimmt. Wenn es auch im Gegensatz zur Behandlung des schwingenden Stabes im Fall der elastischen Platte nicht gelang, wie dort Lösungen in geschlossener Form zu erzielen, und wenn das hier entwickelte Lösungsverfahren auch nicht bis zum numerischen Ende geführt wurde, dürfte es sich hier doch um die Umriss einer Methode handeln, die die Berechnung der Wellenausbreitung in der quer angeschlagenen, unendlichen Platte ermöglicht. Die experimentelle Bestätigung der für die Platte abgeleiteten Ergebnisse ist ebenfalls noch ausständig. Im Hinblick auf das an früherer Stelle berichtete Übereinstimmen zwischen Theorie und Experiment im Fall des elastischen Stabes darf aber vielleicht vermutet werden, daß die hier entwickelte Theorie der Ausbreitung von Stoßwellen in elastischen Platten nicht weniger angemessen ist<sup>13, 14, 15, 16, 17, 18</sup>.

(Eingegangen am 23. März 1955)

## Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit elliptischem Grundriß

Von D. Rüdiger, Dresden

**Zusammenfassung.** Zur Berechnung der Spannungen und der dazugehörigen Verschiebungen der krummen Flächen mit elliptischem Grundriß werden partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine Spannungsfunktion bzw. die senkrechte Verschiebung aufgestellt. Für eine Anzahl spezieller Flächen und Belastungen sind explizite Gleichungen für die Schalenlängskräfte berechnet worden.

### I. Einleitung

In der nachstehenden Arbeit werden die Dehnungsspannungen und die dazugehörigen Verschiebungen der krummen Flächen mit elliptischen Grundrissen berechnet. Die Lösung des Spannungszustandes wird auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Spannungsfunktion zurückgeführt.

<sup>13</sup> H. Hencky: Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten. *Ingenieur-Arch.* **16** (1947).

<sup>14</sup> F. Sauter: Bemerkungen zur Schwingungstheorie dünner elastischer Platten. *Z. Naturforsch.* **3 a** (1948).

<sup>15</sup> L. Cremer: Bemerkungen zur Ausbreitung von BiegeWellen in Stäben und Platten. *Z. angew. Math. Mechan.* **23**, Nr. 5 (1943).

<sup>16</sup> E. Reissner: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mechan., Trans. Amer. Soc. Mechan. Engr.* **67** (1945).

<sup>17</sup> E. Reissner: On bending of elastic plates. *Quart. Appl. Math.* **5** (1947).

<sup>18</sup> J. Boussinesq: Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres. *J. Math., Ser. 2*, **16** (1871); *Ser. 3*, **5** (1879), Paris.



Die aufgestellte Differentialgleichung ist, abgesehen von der Störungsfunktion, mit einer Differentialgleichung identisch, welche A. Pucher<sup>1</sup> zur Berechnung der Spannungen in doppelt gekrümmten Flächen mit Kreisgrundrissen aufgestellt hat und geht im Sonderfall gleicher Halbachsen in diese über. Die Berechnung des Verschiebungszustandes der elliptischen Flächen kann durch Einführung der senkrechten Verschiebung auf dieselbe partielle Differentialgleichung zurückgeführt werden. Zur Ableitung der Endgleichungen wird die allgemeine Schalentheorie von H. Neuber<sup>2</sup> benützt.

## II. Geometrische Werte der elliptischen Flächen

Zur Beschreibung der Flächen werden kartesische Koordinaten  $\bar{x}^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) verwendet, welche differenzierbare Funktionen der krummlinigen Flächenkoordinaten  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) sind. Als Parameterdarstellung eignet sich für Flächen  $F(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = 0$  mit elliptischem Grundriß das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^2 \cos x^1, \\ \bar{x}^2 &= \eta x^2 \sin x^1, \\ \bar{x}^3 &= f(x^1, x^2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die krummlinigen Koordinaten  $x^\alpha$  beschreiben im Grundriß  $\bar{x}^3 = 0$  Ellipsen.  $(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2/\eta^2 = (x^2)^2$ .  $\eta$  ist das Verhältnis der beiden Halbachsen der Ellipse  $x^2 = \text{konst.}$

Aus den Gl. (1) können die notwendigen geometrischen Werte berechnet werden<sup>3</sup>. Die Tangentenvektoren werden mit  $c_\alpha^k = \bar{x}_{|\alpha}^k$  bezeichnet. Ihre kontravarianten Koordinaten sind  $c_\alpha^k$ . Sie folgen als Unterdeterminante der Größen  $c_1^k, c_2^k, N^k$  dividiert durch die Wurzel der Determinante  $a$  der kovarianten Koordinaten des Maßtensors.  $N^k$  sind dabei die Koordinaten des normierten Normalenvektors. Die kovarianten Koordinaten des Maßtensors der Fläche werden aus der Überschiebung  $a_{\alpha\beta} = c_\alpha^k c_\beta^k$  berechnet. Für die Differentialquotienten der Tangentenvektoren wird die Abkürzung  $c_{\alpha\beta}^k = c_{\beta,\alpha}^k$  eingeführt. Die kovarianten Koordinaten des Haupttensors folgen aus den Gleichungen  $b_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^k N_k$ . Zur Berechnung der Christoffel-Klammern zweiter Art der Fläche dienen die Gleichungen  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = c_k^\alpha c_{\beta\gamma}^k$ . Die geometrischen Werte der Flächen sind in der nachfolgenden Tab. 1 zusammengestellt. Die Determinante  $a$  der kovarianten Koordinaten des Maßtensors ergibt sich zu

$$a = (x^2)^2 \eta^2 + f_{11}^2 (\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1) + (x^2)^2 f_{12}^2 (\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1) + x^2 f_{11} f_{12} (1 - \eta^2) \sin 2 x^1.$$

## III. Der Spannungszustand

Zur Berechnung des Spannungszustandes der elliptischen Flächen werden die drei Gleichgewichtsbedingungen an einem differentialen Flächenabschnitt in Richtung der Tangentenvektoren  $c_\alpha^k$  und des Normalenvektors  $N^k$  verwendet<sup>2</sup>:

$$\left. \begin{aligned} L^{\alpha\beta} |_\beta + p^\alpha &= 0, \\ L^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + p^{(3)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In den Gl. (2) sind  $L^{\alpha\beta}$  die mit der Schalendicke multiplizierten kontravarianten Koordinaten des Spannungstensors und  $p$  ( $k$ ) die physikalischen Komponenten der Flächenbelastung in Richtung der Vektoren  $c_\alpha^k$  und  $N^k$ . Zunächst werden in (2)

<sup>1</sup> A. Pucher: Beton u. Eisen **33**, 298 (1934).

<sup>2</sup> H. Neuber: Z. angew. Math. Mechan. **29**, 97 (1949).

<sup>3</sup> Vgl. z. B. A. Duschek-W. Mayer: Lehrbuch der Differentialgeometrie, Bd. I. Leipzig und Berlin. 1930.

Tabelle I. Geometrische Werte der Flächen.

$k, \alpha$	1	2	3
$c_1^k$	$-x^2 \sin x^1$	$+\eta x^2 \cos x^1$	$+f_{11}$
$c_2^k$	$+\cos x^1$	$+\eta \sin x^1$	$+f_{12}$
$Nk$	$+\frac{\eta}{\sqrt{a}}(x^2 f_{12} \cos x^1 - f_{11} \sin x^1)$	$+\frac{1}{\sqrt{a}}(x^2 f_{12} \sin x^1 + f_{11} \cos x^1)$	$-\frac{\eta x^2}{\sqrt{a}}$
$c_k^1$	$-\frac{1}{a}[(\eta^2 + f_{12}^2)x^2 \sin x^1 + f_{11} f_{12} \cos x^1]$	$+\frac{\eta}{a}[(1 + f_{12}^2)x^2 \cos x^1 - f_{11} f_{12} \sin x^1]$	$+\frac{1}{a}[x^2 f_{12} \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + f_{11}(\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1)]$
$c_k^2$	$+\frac{1}{a}[(f_{11}^2 + \eta^2(x^2)^2) \cos x^1 + f_{11} f_{12} x^2 \sin x^1]$	$+\frac{\eta}{a}[(f_{11}^2 + (x^2)^2) \sin x^1 - x^2 f_{11} f_{12} \cos x^1]$	$+\frac{1}{a}[x^2 f_{11} \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + (x^2)^2 f_{12}(\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1)]$
$\alpha_{1\alpha}$	$+(x^2)^2(\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1) + f_{11}^2$	$-x^2 \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + f_{11} f_{12}$	.
$\alpha_{2\alpha}$	$-x^2 \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + f_{11} f_{12}$	$+\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1 + f_{12}^2$	.
$c_{11}^k$	$-x^2 \cos x^1$	$-\eta x^2 \sin x^1$	$+f_{111}$
$c_{12}^k$	$-\sin x^1$	$+\eta \cos x^1$	$+f_{112}$
$c_{22}^k$	0	0	$+f_{122}$
$b_{1\alpha}$	$-\frac{\eta x^2}{\sqrt{a}}(f_{111} + x^2 f_{12})$	$-\frac{\eta x^2}{\sqrt{a}}(f_{12} - f_{11}/x^2)$	.
$b_{2\alpha}$	$-\frac{\eta x^2}{\sqrt{a}}(f_{112} - f_{11}/x^2)$	$-\frac{\eta x^2}{\sqrt{a}}f_{122}$	.

$$\Gamma_{.11}^1 = \frac{f_{111} + x^2 f_{12}}{a} [x^2 f_{12} \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + f_{11}(\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1)],$$

$$\Gamma_{.12}^1 = \frac{1}{a} [\eta^2 x^2 + f_{12} \sin x^1 \cos x^1 (f_{11} + x^2 f_{12}) (1 - \eta^2) + x^2 f_{12}^2 (\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1) + f_{11} f_{12} (\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1)],$$

$$\Gamma_{.22}^1 = \frac{f_{122}}{a} [x^2 f_{12} \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + f_{11}(\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1)],$$

$$\Gamma_{.11}^2 = \frac{x^2}{a} [-\eta^2 (x^2)^2 - f_{11}^2 (\cos^2 x^1 + \eta^2 \sin^2 x^1) + f_{12} f_{111} x^2 (\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1) + f_{11} \sin x^1 \cos x^1 (x^2 f_{12} - f_{111}) (1 - \eta^2)],$$

$$\Gamma_{.12}^2 = \frac{x^2 f_{112} - f_{11}}{a} [f_{11} \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + x^2 f_{12} (\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1)],$$

$$\Gamma_{.22}^2 = \frac{f_{122}}{a} [x^2 f_{11} \sin x^1 \cos x^1 (1 - \eta^2) + (x^2)^2 f_{12} (\sin^2 x^1 + \eta^2 \cos^2 x^1)].$$

die kovarianten Differentialquotienten durch die partiellen ersetzt. Durch Einführung der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}^{\alpha\beta} &= \sqrt{a} L^{\alpha\beta}, \\ \dot{p}^\alpha &= \sqrt{a} p^\alpha, \\ \dot{p}^{(3)} &= \sqrt{a} p^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}_{11}^{11} + \dot{L}_{12}^{12} + \Gamma_{.11}^1 \dot{L}^{11} + 2 \Gamma_{.12}^1 \dot{L}^{12} + \Gamma_{.22}^1 \dot{L}^{22} + \dot{p}^1 &= 0, \\ \dot{L}_{12}^{12} + \dot{L}_{22}^{22} + \Gamma_{.11}^2 \dot{L}^{11} + 2 \Gamma_{.12}^2 \dot{L}^{12} + \Gamma_{.22}^2 \dot{L}^{22} + \dot{p}^2 &= 0, \\ b_{11} \dot{L}^{11} + 2 b_{12} \dot{L}^{12} + b_{22} \dot{L}^{22} + \dot{p}^{(3)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen (4) werden die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma_{.22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 &= \dot{L}_{.11}^{11} + \dot{L}_{.12}^{12} + \dot{L}^{11} \left( \Gamma_{.11}^1 - \frac{b_{11}}{b_{22}} \Gamma_{.22}^1 \right) + 2 \dot{L}^{12} \left( \Gamma_{.12}^1 - \frac{b_{12}}{b_{22}} \Gamma_{.22}^1 \right), \\ \frac{\Gamma_{.11}^2 + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 &= \dot{L}_{.11}^{12} + \dot{L}_{.12}^{22} - x^2 \dot{L}^{11} + 2 \dot{L}^{12} \left( \Gamma_{.12}^2 - \frac{b_{12}}{b_{11}} \Gamma_{.11}^2 - \frac{b_{12}}{b_{11}} x^2 \right) + \\ &\quad + \dot{L}^{22} \left( \Gamma_{.22}^2 - \frac{b_{22}}{b_{11}} \Gamma_{.11}^2 - \frac{b_{22}}{b_{11}} x^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

berechnet. Setzt man in den Klammern der Gl. (5) für die Christoffel-Symbole und die kovarianten Koordinaten des Haupttensors die Werte der Tab. 1 ein, vereinfachen sich diese erheblich. Mit der dritten Gleichgewichtsbedingung (4) folgt

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}_{.11}^{11} + \frac{1}{(x^2)^2} [(x^2)^2 \dot{L}^{12}]_{.2} &= \frac{\Gamma_{.22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1, \\ \dot{L}_{.11}^{12} + \dot{L}_{.12}^{22} - x^2 \dot{L}^{11} &= \frac{\Gamma_{.11}^2 + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2, \\ b_{11} \dot{L}^{11} + 2 b_{12} \dot{L}^{12} + b_{22} \dot{L}^{22} &= -\dot{p}^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die beiden ersten Gl. (6) sind, abgesehen von den Belastungsgliedern, mit den Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes in Polarkoordinaten identisch. Sie werden durch den Ansatz einer Spannungsfunktion  $F(x^1, x^2)$

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}^{11} &= + \frac{F_{.22}}{x^2} + \int \left( \frac{\Gamma_{.22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1, \\ \dot{L}^{12} &= - \left( \frac{F_{.11}}{x^2} \right)_{.2}, \\ \dot{L}^{22} &= + \frac{F_{.11}}{x^2} + F_{.12} + \int \left[ \frac{\Gamma_{.11}^2 + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 + x^2 \int \left( \frac{\Gamma_{.22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 \right] dx^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

identisch erfüllt. Die Differentialgleichung zur Berechnung der Spannungsfunktion wird durch Einsetzen des Ansatzes (7) in die dritte Gleichgewichtsbedingung (6) erhalten. Es ergibt sich die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} b_{11} F_{.22} - 2 b_{12} x^2 \left( \frac{F_{.11}}{x^2} \right)_{.2} + b_{22} (F_{.11} + x^2 F_{.12}) &= -x^2 \left\{ b_{11} \int \left( \frac{\Gamma_{.22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 + \right. \\ &\quad \left. + b_{22} \int \left[ \frac{\Gamma_{.11}^2 + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 + x^2 \int \left( \frac{\Gamma_{.22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 \right] dx^2 + \dot{p}^{(3)} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Gl. (8) ist bis auf die Störungsfunktion mit einer Differentialgleichung identisch, welche A. Pucher<sup>1</sup> zur Berechnung der Dehnungsspannungen in Flächen mit Kreisgrundriß aufgestellt hat.

Die physikalischen Koordinaten des Längskrafttensors  $L(\alpha\beta)$  folgen aus den kontravarianten Koordinaten durch Multiplikation mit  $\sqrt{a_{\alpha\alpha} a^{\beta\beta}}$ .<sup>4</sup>

Für Flächenbelastungen in Richtung der Koordinate  $\bar{x}^3$  vereinfachen sich die Belastungsglieder der Gl. (7) und (8).

Im Falle der Eigengewichtsbelastung in Richtung der Koordinate  $\bar{x}^3$  bei veränderlicher Wandstärke  $h(x^1, x^2)$  gilt für die Belastungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^1 &= \gamma h(x^1, x^2) \sqrt{a} c_3^1, \\ \dot{p}^2 &= \gamma h(x^1, x^2) \sqrt{a} c_3^2, \\ \dot{p}^{(3)} &= \gamma h(x^1, x^2) \sqrt{a} N_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

<sup>4</sup> H. Neuber: Z. angew. Math. Mechan. 23, 323, 324 (1943).



Bei senkrechter, auf die Grundrißebene bezogener Belastung  $q(x^1, x^2)$  ist

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^1 &= q(x^1, x^2) c_3^1, \\ \dot{p}^2 &= q(x^1, x^2) c_3^2, \\ \dot{p}^{(3)} &= q(x^1, x^2) N_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

einzusetzen. Die Belastungsglieder  $\Gamma_{22}^1 \dot{p}^{(3)}/b_{22} - \dot{p}^1$  und  $(\Gamma_{11}^2 + x^2) \dot{p}^{(3)}/b_{11} - \dot{p}^2$  sind für die Belastungen (9) und (10) null. Die Differentialgleichungen folgen damit zu

$$\left. \begin{aligned} b_{11} F_{|22} - 2 b_{12} x^2 \left( \frac{F_{|1}}{x^2} \right)_{|2} + b_{22} (F_{|11} + x^2 F_{|2}) &= \gamma h(x^1, x^2) \eta(x^2)^2, \\ b_{11} F_{|22} - 2 b_{12} x^2 \left( \frac{F_{|1}}{x^2} \right)_{|2} + b_{22} (F_{|11} + x^2 F_{|2}) &= q(x^1, x^2) \frac{\eta(x^2)^2}{\sqrt{a}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

#### IV. Der Verschiebungszustand

Die Verschiebungen der Schalenmittelfläche werden aus den bekannten Gleichungen berechnet, welche zwischen den kovarianten Koordinaten des Verzerrungstensors  $d_{\alpha\beta}$  und des Verschiebungsvektors  $V_k$  bestehen<sup>2</sup>:

$$\frac{1}{2} (V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} V^{(3)} = d_{\alpha\beta}. \quad (12)$$

In den Gl. (12) werden die kovarianten Flächenableitungen durch die partiellen Differentialquotienten ersetzt:

$$\frac{1}{2} (V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha} + 2 \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma) - b_{\alpha\beta} V^{(3)} = d_{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Zur Aufstellung der Differentialgleichung des Verschiebungszustandes bildet man aus Gl. (13) zunächst die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} -d_{11|22} &= -[V_{1|122} - (\Gamma_{11}^\gamma V_\gamma)_{|22} - (b_{11} V^{(3)})_{|22}], \\ +2d_{12|12} &= +[V_{1|122} + V_{2|112} - 2(\Gamma_{12}^\gamma V_\gamma)_{|12} - 2(b_{12} V^{(3)})_{|12}], \\ -d_{22|11} &= -[V_{2|112} - (\Gamma_{22}^\gamma V_\gamma)_{|11} - (b_{22} V^{(3)})_{|11}], \\ +x^2 d_{22|2} &= +x^2 [V_{2|22} - (\Gamma_{22}^\gamma V_\gamma)_{|2} - (b_{22} V^{(3)})_{|2}], \\ +2\left(\frac{d_{11}}{x^2}\right)_{|2} &= +2\left[\left(\frac{V_{1|1}}{x^2}\right)_{|2} - \left(\frac{\Gamma_{11}^\gamma V_\gamma}{x^2}\right)_{|2} - (b_{11} V^{(3)})_{|2}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Addition der Gl. (14) liefert bei Einführung der physikalischen Verschiebung  $W$  in Richtung der Koordinate  $x^3$

$$W = c_3^\alpha V_\alpha + N_3 V^{(3)} \quad (15)$$

unter Beachtung der Werte der Tab. 1 die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (f_{|11} + x^2 f_{|2}) W_{|22} - 2\left(f_{|12} - \frac{f_{|1}}{x^2}\right) (W_{|12} - \frac{1}{x^2} W_{|1}) + f_{|22} (W_{|11} + x^2 W_{|2}) &= \\ = -(d_{11|22} - 2d_{12|12} + d_{22|11}) + x^2 d_{22|2} + 2\left(\frac{d_{11}}{x^2}\right)_{|2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Mit den kovarianten Koordinaten des Haupttensors  $b_{\alpha\beta}$  folgt:

$$\begin{aligned} b_{11} W_{|22} - 2b_{12} x^2 \left(\frac{W_{|1}}{x^2}\right)_{|2} + b_{22} (W_{|11} + x^2 W_{|2}) &= \\ = -N_3 \left[d_{11|22} - 2d_{12|12} + d_{22|11} - x^2 d_{22|2} - 2\left(\frac{d_{11}}{x^2}\right)_{|2}\right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Die Integration der Differentialgleichung (16) für den bekannten Verzerrungszustand liefert unmittelbar die senkrechte Verschiebung  $W(x^1, x^2)$  der Schalenmittelfläche. Die Differentialgleichung des Verschiebungszustandes ist, abgesehen von der Störungsfunktion, mit der Differentialgleichung (8) für die Spannungsfunktion  $F(x^1, x^2)$  identisch. Im Sonderfall  $\eta = 1$  kann die Gl. (16) zur Berechnung der Verschiebungen krummer Flächen mit Kreisgrundriß verwendet werden. Der Spannungszustand dieser Flächen ist bekannt<sup>1</sup>. Aus den Gl. (13) können nach Elimination der Normalverschiebung  $V_{(3)}$  auch Differentialgleichungen für die kovarianten Koordinaten des Verschiebungsvektors  $V_\alpha$  abgeleitet werden.

### V. Lösung der Differentialgleichungen

Bei der Lösung der Differentialgleichungen wird für die Funktion  $f(x^1, x^2)$  der Fläche nach Gl. (1) das Produkt zweier Funktionen  $f(x^1, x^2) = f_1(x^1) f_2(x^2)$  eingeführt. Um einfache Lösungen für die Spannungsfunktion zu bekommen, kann für die Funktion  $f_2(x^2)$  eine Parabel  $f_2(x^2) = \kappa(x^2)^n$  festgelegt werden, so daß

$$f(x^1, x^2) = \kappa(x^2)^n f_1(x^1) \quad (18)$$

ist.  $\kappa$  und  $n$  sind Konstanten. Die kovarianten Koordinaten des Haupttensors ergeben sich nach Tab. 1 zu:

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= N_3 \kappa (x^2)^n (f_1'' + n f_1), \\ b_{12} &= N_3 \kappa (x^2)^{n-1} (n-1) f_1', \\ b_{22} &= N_3 \kappa (x^2)^{n-2} n(n-1) f_1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Im Falle  $n = 0$  ist  $f(x^1, x^2) = \kappa f(x^1)$  eine Funktion von  $x^1$ . Die Höhe  $\bar{x}^3$  der elliptischen Fläche ist der Funktion  $f_1(x^1)$  proportional. Die Koordinaten des Haupttensors folgen aus den Gl. (19) für  $n = 0$ :

$$b_{11} = -\frac{\kappa \eta x^2}{\sqrt{a}} f_1'', \quad b_{12} = +\frac{\kappa \eta}{\sqrt{a}} f_1', \quad b_{22} = 0. \quad (20)$$

Eine Lösung der verkürzten Differentialgleichung (8) und (17)

$$f_1'' F_{122} + f_1' \left( \frac{F_{11}}{x^2} \right)_{12} = 0 \quad (21)$$

gelingt durch den Ansatz

$$F = \Phi(x^1) (x^2)^m. \quad (22)$$

Durch Einsetzen von (22) in (21) erhält man die totale Differentialgleichung

$$m f_1'' \Phi + f_1' \Phi' = 0,$$

aus deren Lösung  $\Phi = c_m f_1'^{-m}$  die Spannungsfunktion

$$F = c_m \left( \frac{x^2}{f_1'} \right)^m \quad (23)$$

erhalten wird. Die Koordinaten des Spannungstensors folgen aus Gl. (7):

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}^{11} &= +c_m m(m-1) \frac{(x^2)^{m-3}}{f_1'^m}, \\ \dot{L}^{12} &= +c_m (m-1) \frac{f_1'' (x^2)^{m-2}}{f_1'^{m+1}}, \\ \dot{L}^{22} &= -c_m (x^2)^{m-1} \left( \frac{f_1''}{f_1'^{m+1}} \right)' \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Für eine senkrechte Belastung  $q(x^1)$  der Grundrißebene der Fläche nach Gl. (18) mit  $n = 0$  können die Schnittkräfte explizit dargestellt werden. Die Lösung der vollständigen Differentialgleichung (11<sub>2</sub>)

$$f_1'' F_{122} + f_1' \left( \frac{F_{11}}{x^2} \right)_{12} = - \frac{x^2 q(x^1)}{\kappa} \quad (25)$$

gelingt durch den Ansatz (22) für  $m = 3$ . Das partikuläre Integral von (25) ist durch Variation der Konstanten leicht zu berechnen. Es lautet:

$$F_0 = - \frac{(x^2)^3}{2 \kappa f_1'^3} J_1, \quad J_1 = \int f_1'^2 q(x^1) dx^1. \quad (26)$$

Aus den Gl. (7) folgen mit der Lösung (26) für die Belastung  $q(x^1)$  die Koordinaten des Längskrafttensors zu

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}^{11} &= - \frac{3 x^2}{\kappa} \frac{J_1}{f_1'^3}, \\ \dot{L}^{12} &= + \frac{x^2}{\kappa} \left( \frac{J_1}{f_1'^3} \right)', \\ \dot{L}^{22} &= - \frac{(x^2)^2}{2 \kappa} \left[ \left( \frac{J_1}{f_1'^3} \right)'' + 3 \left( \frac{J_1}{f_1'^3} \right)' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Wird für die Funktion  $f_1(x^1)$  eine Gerade  $f_1(x^1) = x^1$  festgelegt, dann ist

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = + \frac{\kappa \eta}{\sqrt{a}}, \quad b_{22} = 0. \quad (28)$$

Die Schale ist eine Wendelfläche mit elliptischem Grundriß. Die Lösung für den Spannungszustand folgt durch direkte Integration der Gleichgewichtsbedingungen (6). Wegen  $b_{12} = b_{22} = 0$  wird die Schubkraft durch die Normalkomponente der Belastung  $p^{(3)}$  bestimmt. Aus Gl. (6<sub>3</sub>) folgt sofort

$$\dot{L}^{12} = - \frac{\sqrt{a}}{2 \kappa \eta} \dot{p}^{(3)}. \quad (29_1)$$

Die Komponenten  $\dot{L}^{11}$  und  $\dot{L}^{22}$  ergeben sich durch Integration der Gl. (6<sub>1</sub>) und (6<sub>2</sub>) zu:

$$\dot{L}^{11} = \int \left( \frac{\dot{L}^{122}}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 + \frac{1}{2 \kappa \eta (x^2)^2} \left( (x^2)^2 \sqrt{a} \dot{p}^{(3)} \right)_{12} \right) dx^1 + A(x^2), \quad (29_2)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}^{22} &= \int \left[ \frac{\dot{L}^{211} + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 + \frac{1}{2 \kappa \eta} \left( \dot{p}^{(3)} \sqrt{a} \right)_{11} + \right. \\ &+ \left. x^2 \int \left( \frac{\dot{L}^{122}}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 + \frac{1}{2 \kappa \eta (x^2)^2} \left( (x^2)^2 \sqrt{a} \dot{p}^{(3)} \right)_{12} \right) dx^1 + x^2 A(x^2) \right] dx^2 + B(x^1). \end{aligned} \quad (29_3)$$

Eine zweite einfache Fläche folgt aus Gl. (18) für  $n = 1$ . Die Koordinaten des Haupttensors haben nach Gl. (19) die Werte

$$b_{11} = - \frac{\kappa \eta (x^2)^2}{\sqrt{a}} (f_1'' + f_1), \quad b_{12} = b_{22} = 0. \quad (30)$$

Die Schnittkräfte der Fläche können daher direkt durch Integration der Gleichgewichtsbedingungen (6) berechnet werden. Die Längskraft  $L_{(11)}$  wird durch die Belastungskomponente  $p^{(3)}$  bestimmt:

$$\dot{L}^{11} = - \frac{\dot{p}^{(3)}}{b_{11}}. \quad (31_1)$$



Die beiden anderen Längskräfte ergeben sich durch Integration der Gleichgewichtsbedingungen (6<sub>1</sub>) und (6<sub>2</sub>):

$$\dot{L}^{12} = \frac{1}{(x^2)^2} \int (x^2)^2 \left[ \frac{\Gamma^{1,22}}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 + \left( \frac{\dot{p}^{(3)}}{b_{11}} \right)_{,1} \right] dx^2 + \frac{A(x^1)}{(x^2)^2}, \quad (31_2)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}^{22} = \int \left\{ \frac{\Gamma^{2,11} + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 - \frac{1}{(x^2)^2} \int (x^2)^2 \left[ \frac{\Gamma^{1,22}}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 + \left( \frac{\dot{p}^{(3)}}{b_{11}} \right)_{,1} \right] dx^2 + \right. \\ \left. + \frac{A'(x^1)}{(x^2)^2} - \frac{x^2 \dot{p}^{(3)}}{b_{11}} \right\} dx^2 + B(x^1). \end{aligned} \quad (31_3)$$

Die Gl. (18) enthält für  $n = 2$  eine dritte Gruppe von Flächen, für welche eine einfache Lösung möglich ist. Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion bei senkrechter auf die Grundrißebene bezogener Belastung lautet

$$(x^2)^2 (f_1'' + 2 f_1) F'_{122} - 2 (x^2) f_1' \left( \frac{F_{11}}{x^2} \right)_{,2} + 2 f_1 (F_{111} + x^2 F_{12}) = -q(x^1, x^2) \frac{x^2}{\kappa}. \quad (32)$$

Die Lösung für den Spannungszustand infolge der Flächenbelastung kann aus der Gl. (32) durch den Ansatz (22) für  $m = 1$  gewonnen werden. Aus der Differentialgleichung für  $\Phi(x^1)$

$$\Phi'' + \Phi = -\frac{q(x^1)}{2 \kappa f_1}$$

folgt mit  $F(x^1, x^2) = \Phi(x^1) x^2$  die Lösung

$$F = \frac{x^2}{2 \kappa} (J_1 \cos x^1 - J_2 \sin x^1), \quad (33)$$

wobei die Abkürzungen

$$J_1 = \int \frac{q(x^1) \sin x^1}{f_1(x^1)} dx^1, \quad J_2 = \int \frac{q(x^1) \cos x^1}{f_1(x^1)} dx^1$$

eingeführt wurden. Die Schalenlängskräfte werden aus der Spannungsfunktion (33) und aus den Gl. (7) erhalten. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}^{11} = \dot{L}^{12} = 0, \\ \dot{L}^{22} = -\frac{q(x^1)}{2 \kappa f_1(x^1)}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die Flächenbelastung  $q(x^1)$  wird durch die Längskraft  $\dot{L}^{22}$  übertragen. Die beiden anderen Längskräfte sind null. Die dritte Gruppe der Flächen nach Gl. (18) mit  $n = 2$

$$f(x^1, x^2) = \kappa (x^2)^2 f_1(x^1) \quad (35)$$

enthält zwei bemerkenswerte Flächen. Setzt man für die Funktion  $f_1(x^1)$  in Gl. (35)  $f_1(x^1) = \cos 2 x^1$ , ergibt sich eine Fläche, deren Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^2 \cos x^1, \\ \bar{x}^2 &= \eta x^2 \sin x^1, \\ \bar{x}^3 &= \kappa (x^2)^2 \cos 2 x^1 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

lautet. Die Elimination der krummlinigen Koordinaten  $x^1, x^2$  liefert die Flächen-  
gleichung

$$\bar{x}^3 = \kappa \left( (\bar{x}^1)^2 - \frac{(\bar{x}^2)^2}{\eta^2} \right). \quad (37)$$

Die Gl. (36) beschreiben ein hyperbolisches Paraboloid mit elliptischem Grundriß. Wird für die Funktion  $f_1(x^1)$  in Gl. (35)  $f_1(x^1) = \cos^2 x^1$  festgelegt, folgt die Parameterdarstellung (1) zu

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^2 \cos x^1, \\ \bar{x}^2 &= \eta x^2 \sin x^1, \\ \bar{x}^3 &= \kappa x^2 \cos^2 x^1. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Als Flächengleichung in kartesischen Koordinaten ergibt sich aus (38):

$$\bar{x}^3 = \kappa (\bar{x}^1)^2. \quad (39)$$

Die Fläche (38) ist ein parabolischer Zylinder über elliptischem Grundriß in der üblichen Form der Zylinderschale mit konvexer Oberseite oder als hängendes Schalendach mit konkaver Oberseite.

Eine andere Klasse von Flächen ist durch die Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^2 \cos x^1, \\ \bar{x}^2 &= \eta x^2 \sin x^1, \\ \bar{x}^3 &= f_2(x^2) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

bestimmt. Die Koordinate  $\bar{x}^3$  ist von  $x^1$  unabhängig. Die Differentialgleichung lautet in diesem Falle mit

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{\eta (x^2)^2}{\sqrt{a}} f_2', \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = -\frac{\eta x^2}{\sqrt{a}} f_2'', \\ x^2 f_2' F_{|22} + f_2'' (F_{|11} + x^2 F_{|2}) &= +\frac{\sqrt{a}}{\eta} \left\{ b_{11} \int \left( \frac{\Gamma_{22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 + \right. \\ &\quad \left. + b_{22} \int \left[ \frac{\Gamma_{11}^2 + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 + x^2 \int \left( \frac{\Gamma_{22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 \right] dx^2 + \dot{p}^{(3)} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

oder

$$\begin{aligned} x^2 (f_2' F_{|2})_{|2} + f_2'' F_{|11} &= +\frac{\sqrt{a}}{\eta} \left\{ b_{11} \int \left( \frac{\Gamma_{22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 + \right. \\ &\quad \left. + b_{22} \int \left[ \frac{\Gamma_{11}^2 + x^2}{b_{11}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^2 + x^2 \int \left( \frac{\Gamma_{22}^1}{b_{22}} \dot{p}^{(3)} - \dot{p}^1 \right) dx^1 \right] dx^2 + \dot{p}^{(3)} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Die Gl. (41) und (42) sind, abgesehen von den Störungsfunktionen, mit der Differentialgleichung für eine Spannungsfunktion identisch, die A. Pucher<sup>5</sup> für Rotationsschalen aufgestellt hat. Die dort für die Rotationsschalen berechneten Singularitäten des Spannungszustandes können damit unmittelbar auf die elliptischen Membranen mit konstanter Höhe  $\bar{x}^3$  für  $x^2 = \text{konstant}$  übertragen werden. Zur Berechnung des Spannungszustandes für beliebige Flächenbelastungen ist es zweckmäßiger, die elliptischen Flächen (40) durch Zylinderkoordinaten zu beschreiben, welche für die Rotationsschalen erfolgreich verwendet wurden<sup>6</sup>. Die Berechnung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der elliptischen Membranen kann auf die Differentialgleichungen der Drehschalen zurückgeführt werden, für die eine Vielzahl von Lösungen bekannt sind<sup>7</sup>.

<sup>5</sup> A. Pucher: Abh. Intern. Ver. f. Brücken- u. Hochbau 5, 275 (1938).

<sup>6</sup> D. Rüdiger: Wiss. Z. TH. Dresden 4, 789 (1954/55).

<sup>7</sup> P. Nemenyi und C. Truesdell: Proc. Nat. Acad. Sci. USA 29, 159 (1943). — C. Truesdell: Trans. Amer. Math. Soc. 58, 96 (1945); Bull. Amer. Math. Soc. 54, 994 (1948). — E. Reißner: J. Math. Physics 26, 290 (1948). — D. Rüdiger: Ingenieur-Arch. 22, 336 (1954); Wiss. Z. TH Dresden 4, 271 (1954/55).

(Eingegangen am 4. Juli 1955)

# Abbildung von Oberflächen durch reflektierte Elektronen

Von H. Grumm, Wien

Mit 3 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Neben der mit Durchstrahlung einer dünnen Folie arbeitenden Elektronenmikroskopie ist bei undurchstrahlbaren Objekten die Abbildung mit Hilfe eines reflektierten Elektronenbündels von Bedeutung. In dieser Arbeit wird die Gaußsche und Glaser-Seidelsche Dioptrik der Reflexionsabbildung untersucht. Außerdem wird die für diesen Fall wichtige chromatische Aberration behandelt.

## I. Einleitung

Die Reflexions-Elektronenmikroskope erlauben die Untersuchung der Oberfläche von dicken (undurchstrahlbaren) Materialproben gewissermaßen „im Auflicht“. Ein Typ dieser Mikroskope<sup>1</sup> läßt die Elektronenstrahlung im rechten Winkel zur optischen Achse auf die zu untersuchende Oberfläche einfallen, die nur wenig aus der üblichen, achsensenkrechten Objektebene herausgekippt ist. Diese Methode gibt zwar Abbildungen geringer Verzeichnung, doch liefert sie wegen der großen Geschwindigkeitsstreuung im diffus reflektierten Elektronenbündel nur Abbildungen bedeutender Unschärfe. Ein zweites Verfahren<sup>2</sup> arbeitet mit spiegelnd reflektierten Elektronen, wobei das bestrahlende Bündel wie auch die Oberfläche der Probe einen kleinen Winkel mit der optischen Achse einschließen. Bezüglich der Farbabweichung liegen hier die Verhältnisse günstiger, doch hat man dafür starke Bildverzerrungen in Kauf zu nehmen, da die abzubildende Oberfläche eine verhältnismäßig große Tiefenausdehnung hat.

Die Abbildung von Objektflächen, die schräg zur optischen Achse liegen, ist bisher offenbar nur elementar untersucht worden<sup>3</sup>. Es sollen deshalb hier die wichtigsten Kenngrößen dieser elektronischen Abbildung zusammengestellt werden.

## II. Die Paraxialbahnen

Für gewöhnlich betrachtet man in der Elektronenoptik (entsprechend den Bedingungen in der Durchstrahlungs-Mikroskopie) die Abbildung einer achsensenkrechten Objektebene (Objektfolie) auf eine achsensenkrechte Bildebene (Leuchtschirm). Die flachen und achsennahen Elektronenbahnen, die eine derartige Abbildung vermitteln, können bekanntlich in der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cdot s(z) + \alpha_0 \cdot t(z), \\ y &= y_0 \cdot s(z) + \beta_0 \cdot t(z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

geschrieben werden, wobei  $x_0, y_0$  den Dingpunkt,  $\alpha_0, \beta_0$  die Strahlanfangsrichtungen und  $s(z)$  und  $t(z)$  zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$r'' + \frac{\Phi'}{2\Phi} r' + N r = 0, \quad N = \frac{1}{4\Phi} \left( \Phi'' + \frac{e}{2m} B_z^2 \right) \quad (2)$$

bedeuten, die den Anfangsbedingungen  $s(z_0) = 1, s'(z_0) = 0, t(z_0) = 0$  und  $t'(z_0) = 1$  genügen. Die Fundamentallösungen  $s(z)$  und  $t(z)$  werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Wir nehmen nun an, daß die Objektebene nicht senkrecht auf der optischen Achse steht, sondern einen gewissen Winkel  $\delta$  mit ihr einschließt. Ein in dieser Ebene liegender Objektpunkt kann durch die Größen  $\Delta z_0$  und  $\bar{x}_0$  (bzw.  $\bar{y}_0$ ) festgelegt werden. Die Strahlrichtungen in diesem Objektpunkt sollen durch  $\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0$  charakterisiert werden

<sup>1</sup> E. Ruska: Z. Physik **83**, 492 (1933). — E. Ruska und H. O. Müller: Z. Physik **116**, 366 (1940).

<sup>2</sup> B. v. Borries: Z. Physik **116**, 370 (1940).

<sup>3</sup> J. M. Kuschnir, L. M. Biberman und N. L. Lewkin: Isw. Ak. Nauk **15**, 306 (1951).



(Abb. 1). Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Elektronenbahnen durch die gestrichenen Größen festzulegen. Dazu entwickeln wir die Lösungen  $s(z)$  und  $t(z)$  in der Umgebung von  $z = z_0$  nach Potenzen von  $\Delta z_0$ . Diese Entwicklung soll mit dem zweiten Grade von  $\Delta z_0$  abgebrochen werden. Wir können damit aus (1) die Größen  $\bar{x}_0 = x(\bar{z}_0)$  und  $\bar{\alpha}_0 = x'(\bar{z}_0)$  bestimmen. Diese Ausdrücke hängen linear von  $x_0$  und  $\alpha_0$  ab. Die Auflösung nach  $x_0$  und  $\alpha_0$  ergibt, falls man mit  $\Delta z_0^2$  abbrcht,

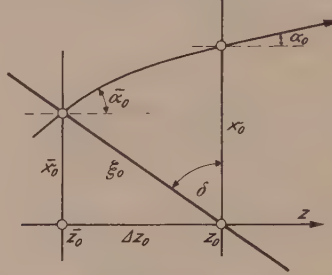


Abb. 1. Festlegung des Objektpunktes in der geneigten Oberfläche

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \bar{x}_0 \left(1 + \frac{1}{2} s_0'' \Delta z_0^2\right) - \bar{\alpha}_0 \left(1 - \frac{1}{2} t_0'' \Delta z_0\right) \Delta z_0 = A \bar{x}_0 + B \bar{\alpha}_0, \\ \alpha_0 &= -\bar{x}_0 \left(s_0'' + \frac{1}{2} s_0''' \Delta z_0 - s_0'' t_0'' \Delta z_0\right) \Delta z_0 + \bar{\alpha}_0 \left(1 - t_0'' \Delta z_0 + s_0'' \Delta z_0^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} t_0''' \Delta z_0^2 + t_0''^2 \Delta z_0^2\right) \\ &= C \bar{x}_0 + D \bar{\alpha}_0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Mit Hilfe von (3) können wir nun  $x_0$  und  $\alpha_0$  (und sinngemäß auch  $y_0$  und  $\beta_0$ ) aus (1) eliminieren und erhalten

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cdot \sigma(z) + \bar{\alpha}_0 \cdot \tau(z), \\ y &= y_0 \cdot \sigma(z) + \bar{\beta}_0 \cdot \tau(z), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dabei bedeutet

$$\sigma(z) = s(z) \cdot A + t(z) \cdot C \quad \text{und} \quad \tau(z) = s(z) \cdot B + t(z) \cdot D. \quad (4a)$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt  $\sigma(\bar{z}_0) = 1$ ,  $\tau(\bar{z}_0) = 0$ ,  $\sigma'(\bar{z}_0) = 0$  und  $\tau'(\bar{z}_0) = 1$ . Damit stellen die Gl. (4) die gesuchten Paraxialbahnen dar.

### III. Stigmatische Abbildung

Genau so wie bei der Abbildung von achsensenkrechten Objektflächen können wir auch hier feststellen, daß paraxiale Elektronenbündel, die von einem Objektpunkt ausgehen, sich wieder in einem Punkt vereinigen. Für den Achsenpunkt  $\bar{x}_0 = 0$  ist das klar. Sein stigmatisches Bild liege in  $z = z_1$ . Das Bild benachbarter Punkte ( $\bar{x}_0 \neq 0$ ) wird in  $(\bar{x}_1, \bar{z}_1)$  liegen, wobei wir die Entfernung  $z_1 \dots \bar{z}_1$  mit  $\Delta z_1$  bezeichnen. Wir finden  $\Delta z_1$  leicht, wenn wir bedenken, daß das Strahlenbündel (4) im Bildpunkt von den Anfangsrichtungen  $\bar{\alpha}_0$  und  $\bar{\beta}_0$  unabhängig sein muß. Die Abszisse des Bildpunktes ist also durch die Bedingung  $\tau(\bar{z}_1) = 0$  gegeben. Durch Entwickeln von  $\tau(z)$  in der Umgebung von  $z = z_1$  erhalten wir unter Beachtung von  $t(z_1) = 0$  und  $s(z_1) = V$

$$t_1' \Delta z_1 = V \Delta z_0 - \frac{1}{2} V t_0'' \Delta z_0^2 + (s_1' + t_1' t_0'') \Delta z_0 \Delta z_1 - \frac{1}{2} t_1'' \Delta z_1^2. \quad (5)$$

Die Auflösung nach  $\Delta z_1$  ergibt, wenn wir mit Größen zweiter Ordnung abrechnen:

$$\Delta z_1 = \frac{V}{t_1'} \Delta z_0 + \frac{s_1'}{t_1'^2} V \Delta z_0^2 + \frac{V}{2 t_1'} \left(t_0'' - \frac{V}{t_1'^2} t_1''\right) \Delta z_0^2. \quad (6)$$

Die Abbildung am neuen Bildort erscheint unter einer veränderten Vergrößerung  $\bar{V}$ , die sich aus der Beziehung  $\bar{V} = \bar{x}_1/\bar{x}_0 = \sigma(\bar{z}_1)$  ergibt. Entwickeln von  $\sigma(z)$  in der Umgebung von  $z = z_1$  führt unter Benützung von (6) auf die Vergrößerung

$$\bar{V} = V \left( 1 + \frac{s_1'}{t_1'} \Delta z_0 + \frac{s_1'^2}{t_1'^2} \Delta z_0^2 \right) + \frac{V}{2} \left[ \frac{s_1'}{t_1'} \left( t_0'' - \frac{V}{t_1'^2} t_1'' \right) - \left( s_0'' - \frac{V}{t_1'^2} s_1'' \right) \right] \Delta z_0^2. \quad (7)$$

Eine Umformung mit Hilfe von (2) ergibt

$$\left. \begin{aligned} t_0'' - \frac{V}{t_1'^2} t_1'' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Phi_1'}{\Phi_0}} \left( V^2 \sqrt{\frac{\Phi_1'}{\Phi_0}} - \frac{\Phi_0'}{\sqrt{\Phi_0}} \right) = F_1, \\ s_0'' - \frac{V}{t_1'^2} s_1'' &= V^3 \frac{\Phi_1'}{2 \Phi_0} s_1' + \left( V^4 \frac{\Phi_1'}{\Phi_0} N_1 - N_0 \right) = F_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

W. Glaser und O. Bergmann<sup>4</sup> gelangten bei der Kritik des Brennweitenbegriffes durch Entwickeln der Abbildungsgleichung zu analogen Beziehungen. Der Ausdruck  $F_1$  verschwindet bei der Magnetlinse identisch, bei der elektrischen Linse hingegen dann, wenn eine oskulierende Newtonsche Abbildung zweiter Ordnung existiert.  $F_2$  verschwindet im magnetischen und im elektrischen Feld, falls eine oskulierende Newtonsche Abbildung zweiter Ordnung existiert. Die Ausdrücke (8) verschwinden insbesondere bei den sog. Newtonschen Feldern. Wir wollen für das Folgende  $F_1 = 0$  und  $F_2 = 0$  voraussetzen. Dann kann man oskulierende Kardinalelemente durch<sup>4</sup>

$$V/f_0 = -s_1'/t_1' \quad \text{und} \quad f_1 = -f_0 \sqrt{\Phi_1/\Phi_0} \quad (9)$$

definieren und erhält für (6) und (7) mit  $t_1' = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi_1}}$

$$\Delta z_1 = \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \frac{V^2 \Delta z_0}{1 + \frac{V}{f_0} \Delta z_0} \quad (10)$$

und

$$\bar{V} = \frac{V}{1 + \frac{V}{f_0} \Delta z_0}. \quad (11)$$

Die Formeln (10) und (11) gelten unter den erwähnten Voraussetzungen bis zu Gliedern zweiter Ordnung in  $\Delta z_0$ . Für Newtonsche Felder gelten sie exakt<sup>5</sup>.

Aus (10) und (11) kann man sofort schließen, daß die Punkte der Objektebene wieder in eine Ebene abgebildet werden, sofern  $\Delta z_0$  nicht die Grenzen unserer Approximation überschreitet. Die Bildebene schließt dabei mit der optischen Achse einen Winkel  $\Omega$  ein, der durch

$$\operatorname{tg} \Omega = V \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \operatorname{tg} \delta \quad (12)$$

gegeben ist (vgl. Abb. 2).

Unter Einführung der Größen  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\eta_0$  und  $\eta_1$  gemäß Abb. 1 und 2 finden wir die Abbildung der Objektebene auf die Bildebene:

<sup>4</sup> W. Glaser und O. Bergmann: Z. angew. Mat. Phys. 363 (1950). Da bei unserem Problem eine analoge Fragestellung auftritt wie in der zitierten Arbeit, sind z. B. die Gl. (10) und (11) mit den dort bestimmten identisch. Vgl. auch W. Glaser: Grundlagen der Elektronenoptik. Wien. 1952.

<sup>5</sup> Bei der Abbildung von Oberflächen mit geringer Neigung gegenüber der optischen Achse wird es in der Regel nötig sein, das Objekt in den praktisch feldfreien Raum außerhalb der Linse zu verlegen. Bei hoher Vergrößerung wird sich der Leuchtschirm ebenfalls im feldfreien Gebiet befinden. In diesem Falle sind  $F_1 = 0$  und  $F_2 = 0$  von selbst erfüllt.

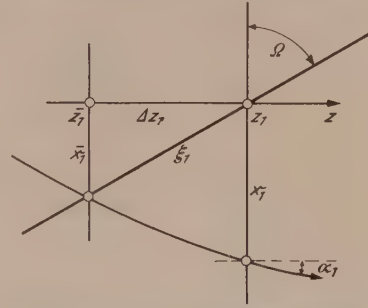


Abb. 2. Festlegung des Bildpunktes in der geneigten Bildebene

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= V \xi_0 \frac{\cos \delta}{\cos \Omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V}{f_0} \xi_0 \sin \delta} = V \xi_0 \frac{\cos \delta}{\cos \Omega} + \dots, \\ \eta_1 &= V \eta_0 \frac{1}{1 + \frac{V}{f_0} \xi_0 \sin \delta} = V \eta_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Abbildung ist also im allgemeinen nicht objektneu, sondern verzerrt. Die in (13) rechtsstehenden Näherungen sind experimentell gesichert<sup>3</sup>. Leider läßt sich diese in erster Ordnung stigmatische Abbildung in der Praxis kaum realisieren. Der Neigungswinkel des Objekts ist gewöhnlich von der Größenordnung  $\delta \approx 5^\circ$ . Bei hoher Vergrößerung würde die Bildebene praktisch in der Einfallsrichtung der Paraxialbahnen liegen, was zu beträchtlichen Intensitätsverlusten auf dem Leuchtschirm führen würde.

#### IV. Abbildung auf beliebig geneigten Auffangschirm

Wenn sich auch die stigmatische Abbildung erster Ordnung aus den erwähnten Gründen kaum verwirklichen läßt, ist es nicht uninteressant, ganz allgemein die Abbildung auf eine beliebig geneigte Auffangebene zu untersuchen. Diese Ebene werde

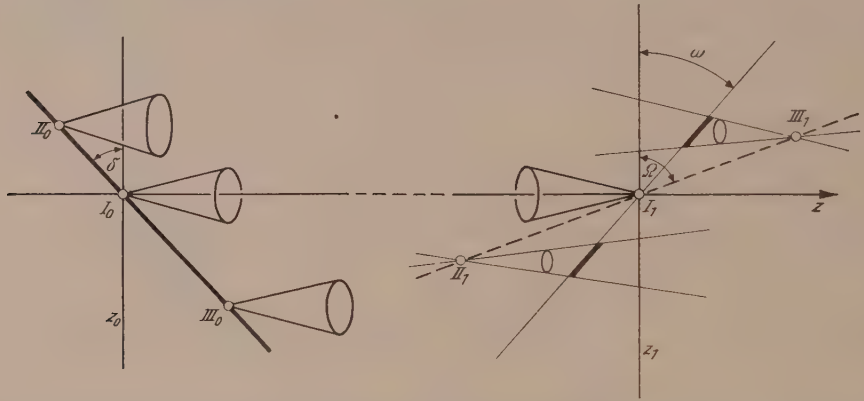


Abb. 3. Objektpunkte, von denen Elektronenbündel bestimmter Apertur ausgehen, werden in der geneigten Bildebene je nach ihrer Lage verschieden abgebildet

im Gaußschen Bildpunkt  $z = z_1$  von der optischen Achse durchstoßen und schließe mit der dort gedachten achsensenkrechten Ebene den Winkel  $\omega$  ein (Abb. 3). Versteht man unter  $x_1$  den Durchstoß einer Paraxialbahn mit der achsensenkrechten Ebene, so kann in erster Näherung die Beziehung

$$\bar{x}_1 = x_1 + \alpha_1 \Delta z_1 + \dots = \Delta z_1 / \tan \omega \quad (14)$$

benutzt werden, woraus sich

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{1 - \alpha_1 \tan \omega} \quad (15)$$

ableiten läßt. Die Größen  $x_1$  und  $\alpha_1$  können (4) entnommen werden. Wenn man sich auf die erste Ordnung in  $\Delta z_0$  beschränkt, erhält man so

$$\xi_1 = V \xi_0 \frac{\cos \delta}{\cos \omega} [1 + \xi_0 s_1' \cos \delta \tan \omega + \bar{\alpha}_0 (t_1' \tan \omega - \tan \delta)]. \quad (16)$$

Eine ähnliche Rechnung führt zu

$$\eta_1 = V \eta_0 (1 + s_1' \xi_0 \cos \delta \tan \omega) + V \bar{\beta}_0 \xi_0 (t_1' \tan \omega - \tan \delta) \cos \delta. \quad (17)$$



Wählt man speziell  $\omega = \Omega$ , so gehen (16–17) mit (9) und (12) richtig in (13) über. Nimmt man eine achsensenkrechte Auffangebene ( $\omega = 0$ ), so ergibt sich unmittelbar in erster Ordnung der aus (4) für  $z = z_1$  folgende Wert. Von gewissem Interesse für das Auflösungsvermögen sind die *Aberrationsfiguren*, die sich für bestimmte Werte der Apertur  $\gamma_0 = \sqrt{\bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2}$  eines vom Dingpunkt ausgehenden Elektronenkegels auf dem Leuchtschirm ergeben. Die Elimination von  $\bar{\alpha}_0$  und  $\bar{\beta}_0$  aus (16–17) führt unmittelbar auf die Ellipsen

$$\left( \frac{\xi_1 - a V \xi_0 \frac{\cos \delta}{\cos \omega}}{\left( \gamma_0 V \xi_0 b \frac{\cos \delta}{\cos \omega} \right)^2} - \frac{(\eta_1 - a V \eta_0)^2}{(\gamma_0 V \xi_0 b \cos \delta)^2} = 1 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a &= 1 + \xi_0' s_1' \cos \delta \operatorname{tg} \omega, \\ b &= t_1' \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \delta. \end{aligned} \quad (18)$$

Setzt man  $\omega = \Omega$  (Ebene der stigmatischen Abbildung), so schrumpfen die Aberrationsellipsen zu Punkten zusammen. Bei senkrechter Bildebene ergeben sich Kreise

$$(\xi_1 - V \xi_0 \cos \delta)^2 + (\eta_1 - V \eta_0)^2 = \gamma_0^2 V^2 \xi_0^2 \sin^2 \delta, \quad (19)$$

deren Größe außer von der Apertur des vom Dingpunkt ausgehenden Strahlenkegels noch von der Lage des Objektpunktes abhängt. Dieser Defokussierungseffekt ist es vor allem, der die bekannte, schnell anwachsende Unschärfe der Leuchtschirmbilder beiderseits der Geraden  $\xi_0 = 0$  bedingt. Wenn man die Mittelpunkte der Aberrationskreise als „Bilder“ der zugehörigen Objektpunkte auffaßt, erkennt man, daß bei senkrechter Auffangebene, wie auch (13) zeigt, in erster Ordnung eine Verzeichnung des Bildes auftritt: in der  $\eta_1$ -Richtung herrscht die Vergrößerung  $V$ , in der  $\xi_1$ -Richtung dagegen die Vergrößerung  $V \cdot \cos \delta$ . Abb. 3 soll die Verhältnisse bei der Abbildung verschiedener Objektpunkte bei schiefer Auffangebene verdeutlichen.

## V. Chromatische Aberration

Erfahrungsgemäß spielt bei der Oberflächen-Abbildung mit reflektierten Elektronen der Farbfehler eine besonders große Rolle. Sein Einfluß soll hier bestimmt werden. Die Funktionen  $\sigma(z)$  und  $\tau(z)$  in (4) sind über  $s(z)$  und  $t(z)$  noch Funktionen der Elektronen-Anfangsspannung  $U$ . Wir betrachten den Abbildungsvorgang bei einer etwas abweichenden Spannung  $U^*$ . Ferner beschränken wir uns auf Größen erster Ordnung in  $U^* - U$  und  $\Delta z_0$  und nehmen an, daß mit senkrechter Auffangebene gearbeitet wird. Wir entwickeln in bekannter Weise<sup>6</sup> und finden

$$\sigma^*(z_1) = V(1 - C_{F_2} \Delta U); \quad \tau^*(z_1) = -V(\Delta z_0 + C_{F_1} \Delta U). \quad (20)$$

Dabei haben wir uns folgender Abkürzungen bedient:

$$C_{F_1} = \frac{U}{|V|} \left( \frac{\partial t}{\partial U} \right)_{z_1}; \quad C_{F_2} = \frac{U}{|V|} \left( \frac{\partial s}{\partial U} \right)_{z_1}; \quad \Delta U = \frac{U^* - U}{U}. \quad (21)$$

Außerdem ist aber noch zu berücksichtigen, daß die Bilddrehung von  $U$  abhängt. Es ist also noch eine Drehung um den Winkel  $\Delta \theta(z_1) = -c \cdot \Delta U$  in der Bildebene vorzunehmen<sup>6</sup>. Unter Berücksichtigung von (20) erhält man schließlich:

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= V[\bar{x}_0 + (c \bar{y}_0 - C_{F_2} \bar{x}_0) \Delta U] - V(\Delta z_0 + C_{F_1} \Delta U) \bar{\alpha}_0, \\ y_1^* &= V[\bar{y}_0 - (c \bar{x}_0 + C_{F_2} \bar{y}_0) \Delta U] - V(\Delta z_0 + C_{F_1} \Delta U) \bar{\beta}_0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Nach einer Verschiebung des Ursprungs durch

$$x_1^* - V \bar{x}_0 = X_1; \quad y_1^* - V \bar{y}_0 = Y_0 \quad (23)$$

findet man, wenn man sich der Abkürzungen

$$c \bar{y}_0 - C_{F_2} \bar{x}_0 = a; \quad c \bar{x}_0 + C_{F_2} \bar{y}_0 = b \quad (24)$$

<sup>6</sup> W. Glaser: Z. Physik **116**, 56 (1940) und Grundlagen der Elektronenoptik, S. 257 ff.

bedient, für die Aberrationskurven:

$$(X_1 + a \Delta U)^2 + (Y_1 + b \Delta U)^2 = V^2 \gamma_0^2 (\Delta z_0 + C_{F_1} \Delta U)^2. \quad (25)$$

Für einen gegebenen Objektpunkt erhält man durch Variation von  $\gamma_0$  und  $\Delta U$  eine Kreisschar. Die Verhältnisse liegen dabei genau so wie in <sup>6</sup>, nur ist der Radius der Aberrationskreise durch den Summanden  $\Delta z_0$  vergrößert.

## VI. Bildfehler dritter Ordnung

Zum Abschluß sollen noch kurz die Bildfehler dritter Ordnung für den Fall senkrechter Bildebene betrachtet werden. In <sup>7</sup> findet man die Bildfehler dritter Ordnung, abhängig von  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  dargestellt. Bei Transformationen dieser Parameter genügt es (wegen der Extremaleigenschaften der Wirkungsfunktion), die Paraxialbahnen zu benützen, um die Aberrationen dritter Ordnung in den neuen Parametern zu erhalten. Wir können also die Beziehungen (4) benützen und finden

$$\begin{aligned} x_1 = & V \bar{x}_0 - V \bar{x}_0 \bar{\alpha}_0 \operatorname{tg} \delta + B_r \bar{\alpha}_0 (\bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2) + \bar{x}_0 [F_r (3 \bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2) + 2 f_r \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_0] + \\ & + \bar{y}_0 [2 F_r \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_0 - f_r (3 \bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2)] + \bar{x}_0^2 \left[ \left( 2 C_r + D_r + \frac{1}{2} V t_0'' \operatorname{tg}^2 \delta \right) \bar{\alpha}_0 + c_r \bar{\beta}_0 \right] + \\ & + 2 \bar{x}_0 \bar{y}_0 (C_r \bar{\beta}_0 - c_r \bar{\alpha}_0) + \bar{y}_0^2 (D_r \bar{\alpha}_0 - c_r \bar{\beta}_0) + \bar{x}_0^3 \left( E_r + \frac{1}{2} V s_0'' \operatorname{tg}^2 \delta \right) + \\ & + E_r \bar{x}_0 \bar{y}_0^2 - e_r \bar{y}_0 (\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2), \quad (26) \\ y_1 = & V \bar{y}_0 - V \bar{x}_0 \bar{\beta}_0 \operatorname{tg} \delta + B_r \bar{\beta}_0 (\bar{\alpha}_0^2 + \bar{\beta}_0^2) + \bar{x}_0 [2 F_r \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_0 + f_r (3 \bar{\beta}_0^2 + \bar{\alpha}_0^2)] + \\ & + \bar{y}_0 [F_r (3 \bar{\beta}_0^2 + \bar{\alpha}_0^2) - 2 f_r \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_0] + \bar{x}_0^2 \left[ \left( D_r + \frac{1}{2} V t_0'' \operatorname{tg}^2 \delta \right) \bar{\beta}_0 + c_r \bar{\alpha}_0 \right] + \\ & + 2 \bar{x}_0 \bar{y}_0 (C_r \bar{\alpha}_0 + \bar{\beta}_0 c_r) + \bar{y}_0^2 [(2 C_r + D_r) \bar{\beta}_0 - c_r \bar{\alpha}_0] + \\ & + \bar{y}_0 \bar{x}_0^2 \left( E_r + \frac{1}{2} V s_0'' \operatorname{tg}^2 \delta \right) + E_r \bar{y}_0^3 + e_r \bar{x}_0 (\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2). \end{aligned}$$

Die durch die schräge Lage der Objektebene bedingten Abweichungen gehen, wie man sieht, nur in Astigmatismus und Verzeichnung dritter Ordnung ein.

(Eingegangen am 17. August 1955)

## Der Axialverdichter als Schallquelle

Von W. Peschka, Wien

Mit 10 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es wird versucht, das Schallfeld eines Axialverdichters durch Lösung der Wellengleichung zu erhalten, wobei vereinfachte Randbedingungen besonders in der Radialebene verwendet werden. Die Lösung wird für den ein- und mehrstufigen Verdichter diskutiert, wobei sich ergibt, daß gewisse Anordnungen der Laufräder und spezielle Schaufelprofile zur Geräuschverminderung beitragen können.

### Bezeichnungen

$A_{n,\lambda}$ ;  $B_{n,\lambda}$ ;  $C_{n,\lambda}$  = Entwicklungskoeffizienten von Orthogonalreihen.

$c$  = Schallgeschwindigkeit.

$l$  = Abstand Rohrende — Rad, Rohrlänge.

$m$ ,  $n$  = Summationsindizes, Ordnung der Harmonischen.

$p$  = Druck, Schalldruckamplitude.

<sup>7</sup> W. Glaser: Grundlagen der Elektronenoptik, S. 411.

$\Delta p$  = Drucksprung, den ein Rad liefert, in Gl. (5) und (7) bedeutet  $\Delta$  den Laplace-Operator.

$r$  = radiale Koordinate.

$s$  = Schaufelzahl.

$v, v$  = Schallschnelle.

$\alpha_m, \beta_m$  = Fourier-Koeffizienten der Randwerte.

$\chi(r), \zeta(r)$  = Funktionen, die die Zirkulationsverteilung bzw. die Verteilung des Verdrängungsdruckes über den Radius charakterisieren. Sie sind so normiert, daß sie an der Stelle des größten Wertes der Zirkulation bzw. des Verdrängungsdruckes  $(\Delta p)_0$  den Wert 1 haben.

$\mu, \nu$  = Summationsindizes, ganze Zahlen.

$\varrho$  = Dichte, Integrationsvariable.

$\sigma$  = Querschnittsfläche, Hilfsfunktion in Gl. (4).

$\tau$  = Integrationsvariable.

$\varphi, \bar{\varphi}$  = Winkel.

$\Phi$  = Geschwindigkeitspotential der Schallschnelle, in Gl. (7) ein nur von  $\varphi$  abhängiges partikuläres Integral der Wellengleichung.

$\omega$  = Winkelgeschwindigkeit.

$x_\lambda^{(n)}$  = Extrem der Ordnung  $\lambda$  der Bessel-Funktion der Ordnung  $n$

$$\left( \frac{d}{dx} J_n(x_\lambda^{(n)}) \right) = 0.$$

## I. Einleitung

Für den Schalldruck von Propellern, die im Freien laufen, wurden von H. Merbt und H. Billing mittels der Singularitätenmethode Lösungen der Wellengleichung gefunden<sup>1</sup>. Auf diese Weise können aber keine Lösungen der Wellengleichung gefunden werden, die auch vorgeschriebene Randwerte auf einem Zylinder annehmen, wie dies z. B. beim Axialverdichter der Fall ist, wenn er in ein Rohr eingebaut ist.

Wohl steht als ein allgemeines Integral das Kirchhoffsche Integral zur Verfügung, aber die Integration bereitet Schwierigkeiten, da der Integrationsweg über abzählbar unendlich viele singuläre Stellen des Integranden führt.

Deshalb wurde in der vorliegenden Arbeit versucht, aus partikulären Integralen der Wellengleichung, die z. B. mittels des Separationsansatzes gewonnen werden können, ein allgemeines Integral aufzubauen, das den erwähnten Randbedingungen genügt.

Die Gültigkeit der Wellengleichung ist für diese Fälle nach H. Merbt und H. Billing gesichert<sup>1</sup>.

## II. Voraussetzungen

1. Die Druckänderungen, die durch die einzelnen Räder hervorgerufen werden, sollen so gering sein, daß die partikulären Integrale der Wellengleichung linear superponierbar sind.

2. Der Schalldruck eines angestellten dicken Flügels soll zerlegbar sein in den Schalldruck eines angestellten Flügels von der Dicke Null und in den Schalldruck eines nichtangestellten dicken Flügels<sup>1</sup>. Dadurch wird der Tatsache Rechnung getragen, daß die Schallursachen bei umlaufenden Flügelrädern der umlaufende Drucksprung in der Radebene — der sog. Drehklang — und anderseits die Druckänderungen durch die Verdrängungswirkung der einzelnen Schaufeln sind.

3. Sämtliche Betrachtungen wurden für den Fall angestellt, daß der Verdichter in ein Rohr endlicher Länge eingebaut ist. Es zeigte sich nämlich, daß das Rohr auf

<sup>1</sup> H. Billing: Geradlinig bewegte Schallquellen. Z. angew. Math. Mechan. 29, 301.



das Schallfeld im Innern einen wesentlichen Einfluß hat. Die Rohrwand wurde als schallhart vorausgesetzt (Normalkomponente der Schallschnelle  $v$  gleich Null). Die Rohrwandreibung wurde vernachlässigt, da im Bereich von 0 bis 10 kHz die Rohrdämpfung noch vernachlässigbar klein ist und höhere Frequenzen nicht in Betracht kommen.

4. Die Rohrwand wurde als starr angesehen, was dann erlaubt ist, wenn als schallübertragende Medien Gase dienen. Soll der Verdichter in Flüssigkeiten arbeiten, dann trifft diese Annahme nicht mehr zu. Die Elastizität der Rohrwand darf dann nicht mehr vernachlässigt werden.

5. Die Beugungserscheinungen an den Schaufeln mehrstufiger Verdichter konnten nicht berücksichtigt werden. Auch die Beugung an den Leitschaufeln wurde vernachlässigt.

6. Die Leitschaufeln übertragen auf die Strömung keine Energie, so daß kein Drehklang durch sie erzeugt wird. Wohl aber sind sie die Ursache eines Verdrängungsgeräusches, das aber auf einfache Weise nicht erfaßt werden kann, da man zu den Verdrängungswirkungen auch noch periodische Wirbelablösungen zählt, die ebenfalls Schall erzeugen<sup>2</sup>. Aus diesem Grunde wurde vorwiegend der Drehklang behandelt, der bei Axialverdichtern auch weitgehend überwiegt.

### III. Randwerte

Die Randwerte werden getrennt für den dünnen Flügel und für den nichtangestellten dicken Flügel formuliert. Zusammen ergeben sie dann den Randwert für den angestellten dicken Flügel. Rotiert das Rad, so tritt in der Radebene die Druckverteilung  $\bar{p}(r, \bar{\varphi})$  auf. Dieses Druckgebilde wird nun starr gedacht und bei stehendem Rad in eine Fourier-Reihe entwickelt.

$$\bar{p}(r, \bar{\varphi}) = \Delta p \cdot \chi(r) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \cdot e^{i m s \bar{\varphi}}.$$

$\bar{\varphi}$  ist dabei auf ein Koordinatensystem bezogen, das mit dem Rad verbunden ist.

Rotiert das Rad, so ist diese Druckverteilung mit  $e^{i \omega t}$  zu multiplizieren, wobei zu beachten ist, daß in einem mit der Rohrwand verbundenen System  $\bar{\varphi} = \omega t - \varphi$  wird.

Damit ergibt sich der Randwert für das rotierende Rad, bezogen auf ein mit der Rohrwand verbundenes Bezugssystem:

$$p(r, \varphi) = \Delta p \cdot \chi(r) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \cdot e^{i m s (\omega t - \varphi)} \cdot e^{i \omega t}. \quad (1)$$

Für die Koeffizienten ergibt sich mit

$$\bar{p}(r, \bar{\varphi}) = \Delta p \cdot \chi(r) \cdot \psi(\bar{\varphi})$$

und mit  $s \bar{\varphi} = \tau$ , wobei  $0 \leq \bar{\varphi} \leq \frac{2\pi}{s}$ ,  $0 \leq \tau \leq 2\pi$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\tau) \cdot e^{-i m \tau} \cdot d\tau. \quad (2)$$

Da  $p(r, \varphi)$  reell, ist  $\alpha_m = \alpha_m^*$  und man kann schreiben:

$$p(r, \varphi) = \Delta p \cdot \chi(r) \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m \cdot e^{i m s (\omega t - \varphi)} + \alpha_m^* \cdot e^{-i m s (\omega t - \varphi)}) \right\} \cdot e^{i \omega t},$$

$$p(r, \varphi) = \Delta p \cdot \chi(r) \cdot \left[ 2 \Re \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cdot e^{i m s (\omega t - \varphi)} \right] \cdot e^{i \omega t}.$$

<sup>2</sup> H. Billing: Geradlinig bewegte Schallquellen. Z. angew. Math. Mechan. **29**, 268 oben.

Als Randwert für den nicht angestellten dicken Flügel wird die Druckverteilung genommen, die sich einstellt, wenn der Flügel auf den Auftrieb Null angestellt wird. Diese Druckverteilung wird am besten empirisch ermittelt, da dann auf einfache Weise die Fourier-Analyse durchgeführt werden kann.

Mit den analogen Bezeichnungen ergibt sich dann nach Entwicklung der gegebenen Druckverteilung in eine Fourier-Reihe für den Randwert des Verdrängungsdruckes:

$$p - p_0 = \bar{g}(r, \bar{\varphi}) = (\Delta p)_0 \cdot \zeta(r) \cdot \sigma(\bar{\varphi}); \quad \beta_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\tau) \cdot e^{-im\tau} \cdot d\tau,$$

$$p - p_0 = g(r, \varphi) = (\Delta p)_0 \cdot \zeta(r) \sum_{m=0}^{\infty} 2 \Re \beta_m \cdot e^{ims(\omega t - \varphi)} \cdot e^{i\omega t} \quad (4)$$

(Abb. 1). Am Rohrende gilt für den Schalldruck in erster Näherung  $p(0, r, \varphi, t) = 0^3$ .

An der Rohrwand des Rohres vom Radius  $R$  gilt:  $v_n(R, \varphi, z, t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{R, \varphi, z, t} = 0$ ; da an der Rohrwand kein Drucksprung auftritt, ist  $\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{R, \varphi, z, t} = 0$ ; mit der von Billing<sup>4</sup> linearisierten Euler-Gleichung ergibt sich dann wegen  $v_\varphi = v_z = 0$  an der Wand:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_n = \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \text{da } v_n = 0.$$

Nun besteht die Aufgabe darin, Lösungen der Wellengleichung

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

zu finden, die den gestellten Randbedingungen genügen.

Da die Lösung periodisch sein muß, so muß sie von der Form  $p_r = \bar{p}_r \cdot e^{i\nu\omega t}$  mit ganzem  $\nu$  sein. Dann kann aber die Wellengleichung in der zeitfreien Form geschrieben werden:

$$\Delta \bar{p}_r + \left(\frac{\nu\omega}{c}\right)^2 \bar{p}_r = 0. \quad (7)$$

Ein Separationsansatz von der Form  $\bar{p}_r = R \cdot \Phi \cdot Z$  liefert dann als partikuläres Integral

$$\bar{p}_r = R(r) \cdot e^{\pm in\varphi} \cdot e^{\pm i\mu z}, \quad n \text{ ganzzahlig},$$

wobei der radiale Bestandteil  $R(r)$  Lösung einer Besselschen Differentialgleichung ist.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ \left(\frac{\nu\omega}{c}\right)^2 - \mu^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] \cdot R = 0.$$

Damit das partikuläre Integral den Randwerten an der Rohrwand und am Rohrende genügt, muß gelten:

$$\bar{p}_r = J_n(\alpha r) \cdot e^{\pm in\varphi} \cdot e^{\pm i\mu z}, \quad \alpha^2 = \left(\frac{\nu\omega}{c}\right)^2 - \mu^2,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha J_n'(\alpha R) = 0, \text{ daher } \alpha R = x_\lambda^{(n)'}, \quad \alpha = \frac{x_\lambda^{(n)'}}{R},$$

$$p(r, \varphi, t, 0) \equiv 0, \quad Z(z) = \sin \left[ \sqrt{\left(\frac{n^2 + 1}{c} \omega\right)^2 - \left(\frac{x_\lambda^{(n)'}}{R}\right)^2} \cdot z \right].$$

Die Koordinate  $z$  wird vom Rohrende an gezählt, so daß die Radebene vom Rohrende den Abstand  $l$  besitzt. Durch Summation über  $\lambda$  und  $n$  erhält man nun ein

<sup>3</sup> E. Skudrzyk: Die Grundlagen der Akustik, S. 147. Wien: Springer-Verlag. 1954.

<sup>4</sup> H. Billing: Geradlinig bewegte Schallquellen. Z. angew. Math. Mechan. 29, 268.

allgemeines Integral der Wellengleichung, das den Randbedingungen am Rohrende  $z = 0$  und an der Rohrwand  $r = R$  genügt. Die Randbedingung in der Radebene  $z = 1$  kann nun durch die Fourier-Koeffizienten  $A_{n,\lambda}$  erfüllt werden.

$$\chi(r) \cdot \alpha_n = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{n,\lambda} \cdot J_n \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} r}{R} \right) \cdot \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{ns+1}{c} \omega \right)^2 - \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} }{R} \right)^2} \cdot l \right]. \quad (8)$$

Durch Vergleich mit dem Randwert Gl. (1) erhält man eine Bedingung für den Parameter  $\nu = ns + 1$ , außerdem wurde  $\varphi$  durch  $-\varphi$  ersetzt.

Setzt man ferner noch für  $\frac{r}{R} = \varrho$ , so kann die Lösung nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$p_1 = \Delta p \cdot \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{n,\lambda} \cdot J_n \left( x_{\lambda}^{(n)'} \varrho \right) \cdot \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{ns+1}{c} \omega \right)^2 - \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} }{R} \right)^2} \cdot z \right] \cdot e^{i ns (\omega t - \varphi)} \right\} \cdot e^{i \omega t}. \quad (8a)$$

Da  $p_1$  reell ist, kann wiederum wie in Gl. (1a) geschrieben werden:

$$p_1 = \left\{ 2 \Re \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{n,\lambda} \cdot J_n \left( x_{\lambda}^{(n)'} \varrho \right) \cdot \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{ns+1}{c} \omega \right)^2 - \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} }{R} \right)^2} \cdot z \right] \cdot e^{i ns (\omega t - \varphi)} \right\} \cdot e^{i \omega t} \cdot \Delta p. \quad (9)$$

Gl. (9) stellt nun den Drehklang dar, der Betrag des Verdrängungsanteiles kann genau so berechnet werden, indem die analogen Randwerte aus Gl. (4) verwendet werden.

$$p_2 = \left\{ 2 \Re \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_{n,\lambda} \cdot J_n \left( x_{\lambda}^{(n)'} \varrho \right) \cdot \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{ns+1}{c} \omega \right)^2 - \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} }{R} \right)^2} \cdot z \right] \cdot e^{i ns (\omega t - \varphi)} \right\} \cdot e^{i \omega t} \cdot (\Delta p)_0. \quad (10)$$

Der gesamte Schalldruck wird dann durch Addition beider Lösungen gewonnen.

$$p_{\text{ges}} = \left\{ 2 \Re \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{n,\lambda} \cdot J_n \left( x_{\lambda}^{(n)'} \varrho \right) \cdot \sin \left[ \sqrt{\left( \frac{ns+1}{c} \omega \right)^2 - \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} }{R} \right)^2} \cdot z \right] \cdot e^{i ns (\omega t - \varphi)} \right\} \cdot e^{i \omega t} \cdot \Delta p. \quad (11)$$

Dabei bedeutet:

$$C_{n,\lambda} = A_{n,\lambda} + \frac{\Delta p}{(\Delta p)_0} \cdot B_{n,\lambda}.$$

Der Koeffizient  $A_{n,\lambda}$  ergibt sich mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation der Bessel-Funktionen<sup>5</sup>

$$A_{n,\lambda} = \frac{\alpha_n \cdot \int_0^1 \chi(\varrho) J_n \left( x_{\lambda}^{(n)'} \varrho \right) \varrho d\varrho}{\sin \left[ \sqrt{\left( \frac{ns+1}{c} \omega \right)^2 - \left( \frac{x_{\lambda}^{(n)'} }{R} \right)^2} \cdot l \right] \cdot \int_0^1 J_n^2 \left( x_{\lambda}^{(n)'} \varrho \right) \varrho d\varrho}, \quad (13a)$$

wobei angenommen wurde, daß die Zirkulation über den Radius  $r$  um den Einzelflügel konstant ist, also  $\zeta(\varrho) = \zeta = \text{konst.}$ ,  $\chi(\varrho) = \chi = \text{konst.}$

Ferner kann dann geschrieben werden:

$$B_{n,\lambda} = A_{n,\lambda} \cdot \frac{\beta_n \cdot \zeta}{\alpha_n \cdot \chi}, \quad C_{n,\lambda} = A_{n,\lambda} \cdot \left( 1 + \frac{\beta_n}{\alpha_n} \right), \quad (14)$$

wobei  $\chi$  und  $\zeta$  auf 1 normiert wurden.

<sup>5</sup> Siehe A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI: Differentialgleichungen, S. 104.



Das Ergebnis Gl. (11) besagt nun, daß das Schallfeld im Rohr aus den Harmonischen  $n s \omega$  der Grundfrequenz  $s \omega$  aufgebaut wird und außerdem noch mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert.

Die Zahl der Harmonischen der Grundfrequenz  $s \omega$  hängt einzig und allein von der Druckverteilung an den Schaufeln des Rades ab. Ändert sich auch  $\omega$ , die Zahl der Harmonischen bleibt gleich.

Die Berechnung der Koeffizienten  $C_{n,\lambda}$  versagt, wenn

$$\sin \left| \sqrt{\left(\frac{n s + 1}{c} \omega\right)^2 - \left(\frac{x_\lambda^{(n)'}}{R}\right)^2} \cdot l \right| = 0,$$

wenn das Rohr in Resonanz kommt. Hier würde die Schalldruckamplitude gegen Unendlich gehen, da die Randbedingung  $p(0) = 0$  keine Abstrahlung nach außen zuläßt.

Dieser Fall wird später besonders behandelt werden.

#### IV. Mehrstufige Verdichter

Es seien  $m$  Laufräder vorhanden. Der gesamte Schalldruck, der von ihnen herührt, darf durch Superposition der Schalldrücke der Einzelräder aufgebaut werden. Der Anteil der Leiträder kann auf diese Weise nicht berücksichtigt werden. Es handelt sich um ein reines Verdrängungsgeräusch, das unter gewissen Bedingungen vernachlässigt werden kann<sup>6</sup>.

Der Abstand der Radebene der  $l$ ten Stufe vom Rohranfang  $z = 0$  sei  $z_l$ .

Der gesamte Schalldruck aller Stufen ergibt sich dann durch Addition der Schalldrücke der einzelnen Stufen.

$$p = \sum_{l=1}^m p_l = \Delta p \cdot \sum_{l=1}^m \left\{ 2 \Re \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{n,\lambda}^{(l)} \cdot J_n(x_\lambda^{(n)'}) \varrho \right] \cdot \sin \left[ \sqrt{\left(\frac{n s + 1}{c} \omega\right)^2 - \left(\frac{x_\lambda^{(n)'}}{R}\right)^2} \cdot z \right] \cdot e^{i n s (\omega t - \varphi - \delta_l)} \right\} \cdot e^{i \omega t}. \quad (15)$$

Es wurde angenommen, daß die Schaufelzahlen der einzelnen Stufen untereinander gleich sind, was aber keine wesentliche Einschränkung der Rechnung mit sich bringt.

$\delta_l$  ist dabei der Winkel, um den das  $l$ te Rad gegen das erste verdreht ist.

Nun soll untersucht werden, ob bei einer derartigen Überlagerung die Möglichkeit besteht, einige Harmonische der Grundfrequenz auszulöschen.

Es soll also für spezielle  $n$ :

$$2 \Re \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{n,\lambda}^{(l)} \cdot J_n(x_\lambda^{(n)'}) \varrho \cdot \sin [\vartheta_{n,\lambda}(s, \omega) \cdot z] \cdot e^{-i n s \delta_l} \right\} \equiv 0,$$

wobei

$$\sqrt{\left(\frac{n s + 1}{c} \omega\right)^2 - \left(\frac{x_\lambda^{(n)'}}{R}\right)^2} = \vartheta_{n,\lambda}(s, \omega).$$

Vertauschung der Summen ergibt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} J_n(x_\lambda^{(n)'}) \varrho \cdot \sin [\vartheta_{n,\lambda}(s, \omega) \cdot z] \cdot \Re \sum_{l=1}^m C_{n,\lambda}^{(l)} \cdot e^{-i n s \delta_l} \equiv 0.$$

Daher muß gelten:

$$\Re \sum_{l=1}^m C_{n,\lambda}^{(l)} \cdot e^{-i n s \delta_l} \equiv 0. \quad (19)$$

<sup>6</sup> H. Billing: Geradlinig bewegte Schallquellen. Z. angew. Math. Mechan. 29, 272, Fußnote 3.

Das ist die Bedingung für das Verschwinden der  $n$ ten Harmonischen der Grundfrequenz.

Hat der Verdichter  $m$  Stufen, so geht  $l$  von 1 bis  $m$ .

Es liegt nun die Frage nahe, ob nicht  $m - 1$  Harmonische auf diese Weise zum Verschwinden gebracht werden können, da  $m - 1$  Gleichungen zur Verfügung stehen.

$$\Re \left\{ \begin{array}{l} C_{1,\lambda}^{(1)} + C_{1,\lambda}^{(2)} \cdot e^{-is\delta_2} + \dots + C_{1,\lambda}^{(m)} \cdot e^{-is\delta_m} = 0, \\ \vdots \\ C_{m,\lambda}^{(1)} + C_{m,\lambda}^{(2)} \cdot e^{-2is\delta_2} + \dots + C_{m,\lambda}^{(m)} \cdot e^{-ims\delta_m} = 0. \end{array} \right. \quad \delta_1 = 0. \quad (20)$$

Gl. (20) stellt nun ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\delta_n$  dar.

Dieses Gleichungssystem soll identisch in  $\lambda$  erfüllt sein, was aber nicht möglich ist, wie am Beispiel des zweistufigen Verdichters gezeigt werden soll ( $m = 2$ ):

$$\Re \left\{ \begin{array}{l} C_{n,\lambda}^{(1)} + C_{n,\lambda}^{(2)} \cdot e^{-is\delta_2} = 0, \quad e^{-is\delta_2} = -\frac{C_{n,\lambda}^{(1)}}{C_{n,\lambda}^{(2)}}, \\ C_{n+1,\lambda}^{(1)} + C_{n+1,\lambda}^{(2)} \cdot e^{-2is\delta_2} = 0, \quad e^{-2is\delta_2} = -\frac{C_{n+1,\lambda}^{(1)}}{C_{n+1,\lambda}^{(2)}} \end{array} \right\} e^{-2is\delta_2} = \left( \frac{C_{n,\lambda}^{(1)}}{C_{n,\lambda}^{(2)}} \right)^2 = -\frac{C_{n+1,\lambda}^{(1)}}{C_{n+1,\lambda}^{(2)}}. \quad (21)$$

Es besteht also zwischen den  $C_{n,\lambda}^{(l)}$  eine Verknüpfungsrelation. Nur dann hat das Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung. Diese Verknüpfungsrelation soll aber identisch in  $\lambda$  erfüllt sein.

$$\begin{aligned} e^{-2is\delta_2} &= \left\{ \frac{\alpha_n^{(1)} \cdot \int_0^1 \left( \chi(\varrho) + \frac{\beta_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}} \cdot \zeta(\varrho) \right) J_n(x_\lambda^{(n)'} \varrho) \varrho d\varrho}{\alpha_n^{(2)} \cdot \int_0^1 \left( \chi(\varrho) + \frac{\beta_n^{(2)}}{\alpha_n^{(2)}} \cdot \zeta(\varrho) \right) J_n(x_\lambda^{(n)'} \varrho) \varrho d\varrho} \cdot \frac{\sin(\vartheta_{n,\lambda} z_2)}{\sin(\vartheta_{n,\lambda} z_1)} \right\}^2 \\ &= -\frac{\alpha_{n+1}^{(1)} \cdot \int_0^1 \left( \chi(\varrho) + \frac{\beta_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n+1}^{(2)}} \cdot \zeta(\varrho) \right) J_n(x_\lambda^{(n)'} \varrho) \varrho d\varrho}{\alpha_{n+1}^{(2)} \cdot \int_0^1 \left( \chi(\varrho) + \frac{\beta_{n+1}^{(2)}}{\alpha_{n+1}^{(2)}} \cdot \zeta(\varrho) \right) J_n(x_\lambda^{(n)'} \varrho) \varrho d\varrho} \cdot \frac{\sin(\vartheta_{n+1,\lambda} z_2)}{\sin(\vartheta_{n+1,\lambda} z_1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Sind nun die Abmessungen des Verdichters gegen die Rohrlänge klein, dann gilt  $z_m - z_1 \ll z_m$  und ferner:

$$\left| \frac{\sin(\vartheta_{n,\lambda} z_1)}{\sin(\vartheta_{n+1,\lambda} z_2)} \right| \doteq 1. \quad (26)$$

Haben ferner beide Stufen gleiche Zirkulationsverteilung über den Radius  $r$  und gilt:

$$\chi^{(1)}(\varrho) = \chi^{(2)}(\varrho), \quad \zeta^{(1)}(\varrho) = \zeta^{(2)}(\varrho),$$

dann kann Gl. (22) einfacher geschrieben werden:

$$\left( \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}} \right)^2 = -\frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{\alpha_{n+1}^{(2)}}. \quad (27)$$

Ist also bei einem zweistufigen Verdichter die Bedingung Gl. (27) erfüllt, dann verschwindet die  $n$ te Harmonische.

Vereinfacht wird das Problem, wenn alle Stufen auch bei einem  $m$ -stufigen Verdichter untereinander gleich sind, dann ist nämlich  $C_{n,\lambda}^{(l)} = C_{n,\lambda}$  unabhängig von  $l$ .

In diesem Falle reduziert sich das Gleichungssystem (20) auf:

$$\Re \left\{ \begin{array}{l} 1 + e^{-is\delta_2} + \dots + e^{-is\delta_m} = 0, \\ \vdots \\ 1 + e^{-ims\delta_2} + \dots + e^{-ims\delta_m} = 0. \end{array} \right. \quad (30)$$

Es müssen nun reelle Lösungen  $\delta_m$  dieses Gleichungssystems gefunden werden.

Die Verhältnisse können leicht überblickt werden, wenn man die Gaußsche Zahlenebene zu Hilfe nimmt und jede Größe  $e^{-i m s \delta_m}$  durch ihren Zeiger darstellt.

Dies sei zunächst für gerades  $m$  gemacht (Abb. 2).

Man sieht nun, daß  $m s \delta_m$  immer nur ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  sein kann. Dann sind nämlich die Lösungen der ersten Gleichung automatisch auch Lösungen aller anderen.

Es muß also ein  $\delta_l$  so beschaffen sein, daß  $\cos s \delta_l = -1$ , und die anderen müssen sich paarweise wegheben, also

$$\delta_v = \frac{(2K+1)\pi}{s}.$$

Es muß daher bei gerader Stufenzahl das Rad irgendeiner beliebigen Stufe um  $\frac{\pi}{s}$  gegen das erste verdreht sein. Die Stellungen der anderen Räder gegenüber dem ersten können beliebig sein, nur müssen immer zwei um  $\frac{\pi}{s}$  gegeneinander verdreht sein.

Bei ungerader Stufenzahl tritt eine kleine Änderung ein, insofern nämlich zwei Räder bestimmte Winkel mit der ersten Stufe einschließen müssen (Abb. 3).

$$\cos s \delta_v + \cos s \delta_\mu = -1.$$



Abb. 2

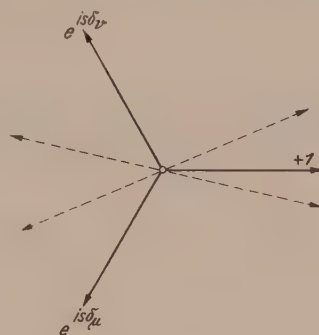


Abb. 3

Es müssen also die Räder dreier Stufen so gegeneinander verdreht sein, daß

$$[\delta_1 = 0], \quad \delta_v = \frac{2\pi}{3s}, \quad \delta_\mu = \frac{4\pi}{3s}. \quad (33)$$

Alle anderen Räder können beliebig verdreht sein, nur müssen immer je zwei den Winkel  $\frac{\pi}{s}$  miteinander einschließen.

Auf diese Weise kann man bei einem  $m$ -stufigen Verdichter, der aus lauter gleichen Stufen besteht, eine Harmonische der Grundfrequenz angenähert auslöschen. Angenähert deshalb, weil die Beugungserscheinungen an den Schaufeln nicht berücksichtigt wurden.

Bei einem Verdichter, dessen Stufen untereinander nicht gleiche Eigenschaften haben, kann eine solche allgemeine Aussage nicht gemacht werden, wie das Beispiel des zweistufigen Verdichters zeigt.

Es treten hier noch zusätzlich Bedingungen für die Fourier-Koeffizienten  $\alpha_n^{(l)}$  hinzu [Gl. (27)]. Es sind also für einen mehrstufigen Verdichter nicht beliebige Stufeneigenschaften möglich, sondern nur diskrete Werte, die durch die Werte der ersten Stufe und durch das Gleichungssystem (20) gegeben sind. Solange nun über das Gleichungssystem (20) keine allgemeinen Aussagen gemacht werden können, bleibt keine andere Möglichkeit, als für jeden Fall eines Verdichters mit verschiedenen Stufeneigenschaften die Rechnung durchzuführen. Eine weitere Erschwerung der Rechnung besteht darin, daß es sich um die Auflösung von Gleichungssystemen



$m$ ten Grades handelt, wobei komplexe Nullstellen zu suchen sind, da die Fourier-Koeffizienten  $\alpha_n^{(i)}$ , die gesucht werden, nicht reell sind.

Hat der Verdichter gleiche Stufeneigenschaften, so tritt hier eine Art Entartung auf, indem nämlich immer zwei Räder um  $\frac{\pi}{s}$  gegeneinander verdreht sein müssen, aber ihre Lage gegen das erste Rad ansonsten beliebig ist. Bei einem mehrstufigen Verdichter mit verschiedenen Stufeneigenschaften sind hingegen die Winkel  $\delta_i$  eindeutig bestimmt, wie man zeigen kann.

Es möge noch erwähnt werden, daß mit der Bezeichnung „Erstes Rad“ nicht irgendein geometrisch ausgezeichnetes gemeint ist, sondern ein beliebiges, das als Bezugssystem für den Winkel  $\delta_i$  genommen wird.

Einfluß des Diffusors auf den Schalldruck im Rohr:

Der Diffusor ist — akustisch gesprochen — ein konischer Schalltrichter mit sehr geringer Erweiterung. In der Akustik werden hier Flächenverhältnisse von  $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 100$  noch ohne weiters verwendet. Für solche Schalltrichter existiert eine Theorie, die aber hier nicht verwendet werden soll, weil die geringen Erweiterungen, die bei einem Diffusor zulässig sind ( $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1.2 \div 1.7$ ), Vernachlässigungen gestatten, die man bei der üblichen Schalltrichtertheorie nicht machen darf.

Da es sich also um sehr geringe Erweiterungen handelt, kann über die Schalldrücke näherungsweise folgendes ausgesagt werden (Abb. 4):

$$p_a \doteq p_b.$$

Die Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$(\sigma_0 v_0)_a = (\sigma v)_b.$$

Fällt eine ebene Welle von links ein, so lautet ihre Gleichung folgendermaßen:

$$p_1 = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}.$$

$A_1 e^{ikx}$  ist der primäre Anteil von  $p_1$ ,  $A_2 e^{-ikx}$  der am Diffusor reflektierte Teil.

$$p_2 = B e^{ikx}, \quad A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} = B e^{ikx}, \quad Ka = 2\pi v, \quad Kb = 2\pi \mu.$$

Man erhält also für die Amplituden:

$$A_1 + A_2 = B,$$

$$\sigma_0 (A_1 - A_2) = \sigma B$$

und weiters

$$B = A_1 + A_2 = \frac{2\sigma_0}{\sigma_0 + \sigma} A_1. \quad (35)$$

Der Diffusor übt also wegen seiner geringen Erweiterung auf den Schalldruck praktisch vernachlässigbare Veränderungen aus.

Ebenso dürften die Erweiterungen, die bei mehrstufigen Verdichtern gemacht werden, in erster Näherung vernachlässigbar sein.

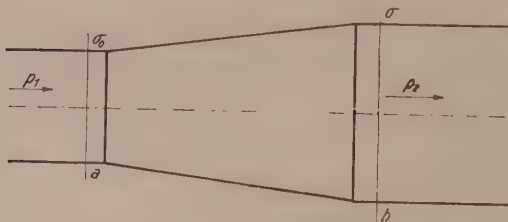


Abb. 4

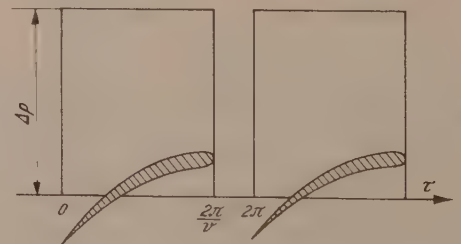


Abb. 5. Rechteckige Druckverteilung

Einfluß verschiedener Druckverteilungen in der Radebene auf das Schallspektrum:

Zur Berechnung des Schallspektrums ist die Entwicklung des Randwertes in der Radebene in eine Fourier-Reihe erforderlich, da die Fourier-Koeffizienten bekannt sein müssen.

Es mögen nun zwei Extremfälle von Druckverteilungen behandelt werden, nämlich eine Rechteckverteilung und eine Sinusförmige.

1. Rechteckverteilung des Druckrandwertes (Abb. 5).

Der Druck möge an den Schaufeln, die in die Radebene projiziert gedacht werden, den Wert  $\Delta p + p$  haben, außerhalb  $p$ .

Es wird also die Wirkung des Rades als Schallquelle durch solch ein rotierendes Druckgebilde ersetzt.

Entwicklung als gerade Funktion:

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 1 \dots -\frac{\pi}{\nu} \leq \tau \leq \frac{\pi}{\nu}, \\ 0 \dots \frac{\pi}{\nu} \leq \tau \leq 2\pi \left(1 - \frac{1}{\nu}\right). \end{cases}$$

Der Druckrandwert lautet dann also folgendermaßen:

$$p(r, \varphi) = \Delta p \cdot \chi(r) \cdot \left[ 2 \Re \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m e^{i m s (\omega t - \varphi)} \right] \cdot e^{i \omega t}.$$

Die Berechnung der Koeffizienten  $\alpha_m$  ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\tau) \cdot e^{-i m \tau} d\tau = -\frac{1}{2\pi i m} \cdot e^{-i m \tau} \Big|_{-\frac{\pi}{\nu}}^{\frac{\pi}{\nu}} = -\frac{1}{2\pi i m} \left( e^{-i \frac{m}{\nu} \pi} - e^{-i \frac{m}{\nu} \pi} \right), \\ \alpha_m &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{m} \cdot \sin \frac{m}{\nu} \pi = \frac{1}{\pi m} \cdot \sin \frac{m \pi}{\nu}, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\nu}}^{\frac{\pi}{\nu}} d\tau = \frac{1}{\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Der Randwert kann nun folgendermaßen angeschrieben werden:

$$p(r, \varphi) = \Delta p \cdot \chi(r) \left\{ \frac{1}{\nu} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} \cdot \sin \frac{m \pi}{\nu} \cos m s (\omega t - \varphi) \right\} \cdot e^{i \omega t}. \quad (37)$$

Ist  $\chi(r) = 1$  (konstante Zirkulationsverteilung), dann kann der Koeffizient  $C_{n, \lambda}$  kürzer angeschrieben werden:

$$C_{n, \lambda} = \frac{\alpha_n \cdot \int_0^1 J_n(x_{\lambda}^{(n)'} \varrho) \varrho d\varrho}{\sin(\vartheta_{n, \lambda} \cdot l) \int_0^1 J_n^2(x_{\lambda}^{(n)'} \varrho) \varrho d\varrho} = \alpha_n \cdot C'_{n, \lambda}. \quad (38)$$

Ist also  $\alpha_n$  reell, so ist auch  $C_{n, \lambda}$  reell.

Der Schalldruck im Rohr lautet dann:

$$p(r, \varphi, z, t) = \Delta p \left[ \frac{1}{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} C'_{n, \lambda} \cdot J_n(x_{\lambda}^{(n)'} \varrho) \sin(\vartheta_{n, \lambda} \cdot z) \cdot \alpha_n \cdot \cos n s (\omega t - \varphi) \right] \cdot e^{i \omega t}. \quad (39)$$

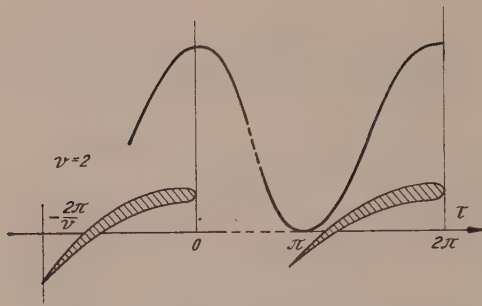


Abb. 6. Sinusförmige Druckverteilung

Es sind also alle Harmonischen der Grundfrequenz vertreten, und ihre Amplitude nimmt im wesentlichen mit  $\alpha_n$  ab.

## 2. Sinusförmige Druckverteilung (Abb. 6).

$$\left. \begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{1}{2} (1 + \cos \tau), \\ \alpha_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau \cdot e^{-im\tau} \cdot d\tau, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \\ \alpha_n &= 0, \quad n \neq 0; 1. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Von der Summe bleiben also nur zwei Glieder übrig:

$$p(r, \varphi, t) = \frac{1}{2} \Delta p \cdot \chi(r) [1 + \cos s(\omega t - \varphi)] e^{i\omega t}, \quad (40a)$$

und der Schalldruck im Rohr ergibt sich in diesem Falle mit:

$$p(r, \varphi, z, t) = \frac{1}{2} \Delta p \left[ 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{1,\lambda} \cdot J_1(x_{\lambda}^{(1)} \varrho) \cdot \sin(\vartheta_{1,\lambda} \cdot z) \cdot \cos s(\omega t - \varphi) \right] \cdot e^{i\omega t}. \quad (41)$$

Daraus ergibt sich folgendes: Je mehr die Druckverteilung in der Radebene einer sinusförmigen Druckverteilung angenähert werden kann, desto weniger Oberwellen treten im Geräuschspektrum auf. Es bleibt dann im wesentlichen nur die Grundfrequenz, während die Amplituden der Oberwellen gegen Null gehen.

Die Grundwelle kann aber schon bei einem zweistufigen Verdichter durch gegenseitiges Verdrehen der Räder um  $\frac{\pi}{s}$  ausgelöscht werden. Wenn es also möglich wäre, Profile zu finden, die eine solche Druckverteilung wenigstens angenähert zeigen, dann wäre damit vielleicht eine Möglichkeit gegeben, das Geräusch von Axialverdichtern zu verringern. Die Druckverteilung an den üblichen Schaufeln wird im allgemeinen einer trapezförmigen ziemlich nahe kommen, so daß hier genau so wie bei der Rechteckverteilung eine große Zahl von Oberwellen vertreten ist.

## Abhängigkeit des Schalldruckes von der Drehzahl:

Aus Gl. (15) ergibt sich, daß der Schalldruck bei zunehmender Drehzahl linear mit dem Druck  $\Delta p$  wächst. Da aber bei einem Axialrad der Druck  $\Delta p$  quadratisch mit der Drehzahl wächst, so nimmt auch der Schalldruck quadratisch mit der Drehzahl zu.

Allerdings ändert sich bei zunehmender Drehzahl der Schwingungscharakter im Rohr.

Der Ausdruck  $\sqrt{\left[\frac{ns+1}{c} \omega\right]^2 - \left(\frac{x_{\lambda}^{(n)}}{R}\right)^2}$  ist von  $\omega$  abhängig.

Ist  $\frac{ns+1}{c} \omega < \frac{x_{\lambda}^{(n)}}{R}$ , so wird die Wurzel imaginär und die Lösung stellt nur mehr eine mit  $z$  exponentiell abnehmende Schallfeldverzerrung dar, die vernachlässigt werden kann, wenn man von der unmittelbarsten Umgebung des Rades absieht<sup>7</sup>. Dies ist ohneweiters zulässig, da ja der Druckrandwert des Rades bereits in die Radebene verlegt wurde, was die geometrische Längsausdehnung des Rades ignoriert.

<sup>7</sup> E. Skudrzyk: Die Grundlagen der Akustik, S. 144. Wien: Springer-Verlag. 1954.



Eine andere Änderung des Schwingungscharakters wird durch die Bessel-Funktion in der Lösung bewirkt.

Das erste Extrem von  $J_0(\xi)$  ist  $x_1^{(0)'} = 0$ . Da  $J_0(0) = 1$ , ist das Schallfeld über den Rohrquerschnitt konstant, solange  $\frac{\omega}{c} < \frac{x_1^{(0)'}}{R}$  ist. Diesem Falle entspricht demnach die gewöhnliche „eindimensionale“ Behandlungsweise.

Jedesmal, wenn nun bei Steigerung von  $\omega \frac{ns+1}{c} \omega \geq \frac{x_\lambda^{(n)'}}{R}$ , so wird eine neue Schwingung im Rohr angeregt, deren Amplitude aber nicht mehr über den Rohrquerschnitt konstant ist.

Daraus ergibt sich, daß unterhalb der Grenzfrequenz, die durch  $\omega = c \frac{x_1^{(0)'}}{R}$  gegeben ist, die Schallausbreitung im Rohr immer eindimensionalen Charakter trägt, so daß der Schall sozusagen durch das Rohr geführt wird. Erst oberhalb dieser Grenzfrequenz treten dann Schwingungen auf, die nicht mehr eindimensional behandelt werden können, da ihre Amplitude über den Rohrquerschnitt nicht mehr konstant ist.

#### Einfluß der Rohrresonanz und Energiebilanz des Schallfeldes:

In diesem Kapitel soll das Verhalten des Rohres unter seiner Grenzfrequenz untersucht werden. Ferner soll auch der Einfluß der Rohrresonanz auf die Energiebilanz des Schallfeldes berücksichtigt werden.

Zu diesem Zweck wird ein Rohr von der Länge  $l$  betrachtet. Unterhalb der genannten Grenzfrequenz gibt es im Rohr nur ebene Wellen, so daß man sich das Rohr durch eine schwingende Kolbenmembran an der Stelle  $l$  angeregt denken kann.

Die Membranschnelle (Membrangeschwindigkeit) sei  $\mathfrak{B}_0$ .

Die Kurrentschreibung soll andeuten, daß überall der Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  auftritt.

Da es sich also um eine ebene Welle handelt, ist der Schalldruck im Rohr gegeben durch:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} e^{iKz} + \mathfrak{B} \cdot e^{-iKz}.$$

Es tritt also eine vorlaufende Welle  $e^{iKz}$  auf, und eine rücklaufende, die dadurch entsteht, daß ein Teil von  $e^{iKz}$  am Rohrende  $z = 0$  reflektiert wird.

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} e^{iKz} + \mathfrak{B} \cdot e^{-iKz} = \mathfrak{A} \left( e^{iKz} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot e^{-iKz} \right) = \mathfrak{A} (e^{iKz} + \mathfrak{R}_a e^{-iKz}), \quad |\mathfrak{R}_a| \leq 1.$$

$\mathfrak{R}_a$  ist der sog. Reflexionsfaktor.

Die Konstante  $\mathfrak{A}$  läßt sich aus den Randbedingungen ermitteln.

$$(\mathfrak{P})_{z=l} = \mathfrak{B}_0 \cdot \mathfrak{Z}_e = \mathfrak{A} \cdot e^{iKl} \cdot (1 + \mathfrak{R}_a \cdot e^{-2iKl}), \quad \mathfrak{Z}_e = \varrho c \frac{1 + e^{-2iKl} \cdot \mathfrak{R}_a}{1 - e^{-2iKl} \cdot \mathfrak{R}_a}. \quad (42)$$

Wobei  $\mathfrak{Z}_e$  die akustische Eingangsimpedanz des Rohres ist<sup>8</sup>. Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{P} = \varrho c v_0 \cdot e^{iK(z-l)} \cdot \frac{1 + \mathfrak{R}_a \cdot e^{-2iKz}}{1 - \mathfrak{R}_a \cdot e^{-2iKl}}. \quad (43)$$

Es ergibt sich also folgendes: Ist  $|\mathfrak{R}_a| = 1$ , wird also vom Rohrende alles reflektiert, dann geht  $|\mathfrak{P}|$  gegen Unendlich.

Für  $|\mathfrak{R}_a| < 1$  erhält man hingegen endliche Resonanzmaxima für den Schalldruck, die für diesen Fall berechnet werden sollen. Für die Resonanzüberhöhung ist nur maßgebend

$$\frac{1 + \mathfrak{R}_a e^{-2iKz}}{1 - \mathfrak{R}_a e^{-2iKl}},$$

da  $|e^{iK(z-l)}| = 1$  ist.

<sup>8</sup> Siehe E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 521.

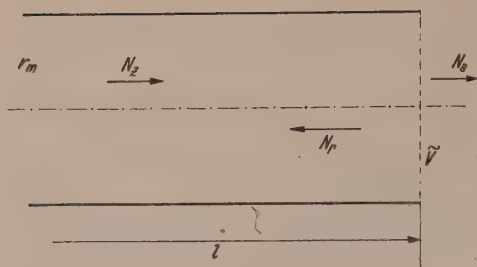


Abb. 7

Es ist daher:

$$\frac{P_{\text{res}}}{P} = \left| \frac{1 + \Re_a e^{-2iKl}}{1 - \Re_a e^{-2iKl}} \right|.$$

$\Re_a$  sei als reell vorausgesetzt.

$$\left| \frac{1 + R_a e^{-2iKl}}{1 - R_a e^{-2iKl}} \right|_{\text{max}} = \frac{1 + R_a}{1 - R_a} = \frac{P_{\text{res}}}{P}. \quad (44)$$

$\Re_a$  ist deswegen reell, weil von Reibungsverlusten abgesehen wurde.

Nun muß noch  $R_a$  bestimmt werden. Das offene Rohrende darf man sich als strahlende Kolbenmembran denken<sup>9</sup> (Abb. 7).

Die von einer Kolbenmembran abgegebene Schalleistung beträgt  $N_a = r_s \cdot \tilde{V}^2$ ,<sup>10</sup> wobei  $r_s$  den sog. Strahlungswiderstand der Kolbenmembran und  $\tilde{V}$  bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Schallschnelle am Rohrende bedeutet. Die durch das Rohr zugeführte Leistung beträgt  $N_z = r_m \tilde{V}^2$ , wobei  $r_m$  den Wellenwiderstand des Mediums bedeutet.

Der Reflexionsfaktor kann nun aus dem Verhältnis von abgestrahlter zu zugeführter Leistung berechnet werden<sup>11</sup>.

$$\frac{N_a}{N_z} = 1 - R_a^2, \quad \frac{N_a}{N_z} = \frac{r_s}{r_m}, \quad R_a^2 = 1 - \frac{r_s}{r_m}, \quad (45)$$

$$\frac{P_{\text{res}}}{P} = \frac{1 + R_a}{1 - R_a} = \frac{\left(2 - \frac{r_s}{r_m}\right)^2}{\frac{r_s}{r_m}}. \quad (46)$$

Nun fehlt noch das Verhältnis  $\frac{r_s}{r_m}$ .

Für die Kolbenmembran ist der Strahlungswiderstand berechnet worden, er lautet:

$$r_s = r_m \left[ 1 - \frac{J_1(2Ka)}{Ka} \right], \quad \text{also} \quad \frac{r_s}{r_m} = 1 - \frac{J_1(2Ka)}{Ka}. \quad (47)$$

( $a$  = Radius der Kolbenmembran,  $K$  = Kreiswellenzahl.)

Die Resonanzüberhöhung rechnet sich dann mit:

$$\kappa = \frac{P_{\text{res}}}{P} = \frac{\left(1 + \frac{J_1(2Ka)}{Ka}\right)^2}{1 - \frac{J_1(2Ka)}{Ka}}. \quad (46a)$$

In Abb. 8 wurde Gl. (46) graphisch wiedergegeben.

Als Abszisse ist die Größe  $ns$  eingeführt worden, wobei  $n$  Drehzahl/Min. bedeutet.

Die Rechnung gilt streng genommen nur für den eindimensionalen Fall, wenn also das Schallfeld über den Rohrquerschnitt konstant ist. Die Verhältnisse bleiben aber auch dann noch näherungsweise gültig, wenn dies nicht mehr der Fall ist. Es wird dann mit einem Mittelwert des Schalldruckes gerechnet.

Als Ordinate ist im logarithmischen Maßstab  $\frac{r_s}{r_m}$  aufgetragen, während mittels der stark ausgezogenen Kurve  $C$  sofort das Verhältnis  $\kappa$  abgelesen werden kann.

<sup>9</sup> E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 347.

<sup>10</sup> E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 114.

<sup>11</sup> E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 126.

<sup>12</sup> E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 285.

Man erhält folgendes Ergebnis: Jedesmal wenn beim Anlaufen des Rades die Grundfrequenz eine Axialresonanz des Rohres erreicht — Radialresonanzen treten nur bei extrem dünnwandigen Rohren auf —, tritt eine entsprechende Resonanzüberhöhung des Schalldruckes auf. Der Schalldruck als Funktion der Anlaufzeit betrachtet, durchläuft also eine Reihe von Maximalwerten, die durch die entsprechen-

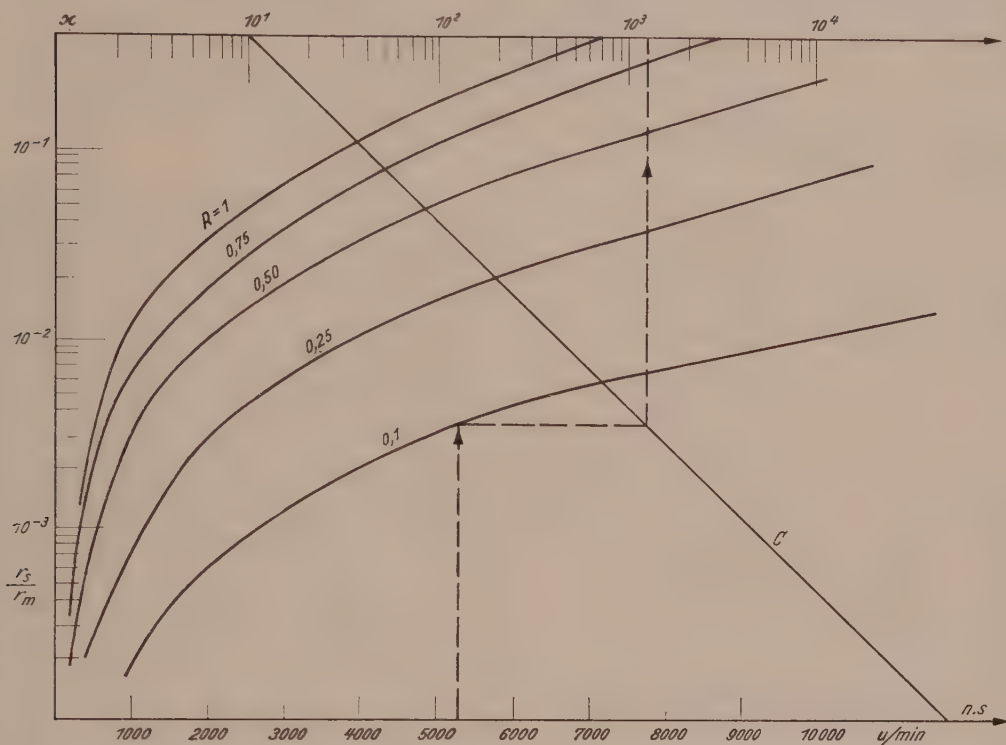


Abb. 8. Die Resonanzüberhöhung  $\alpha$  als Funktion der Drehzahl  $n$  und dem Rohrradius  $R$  als Parameter [ $R$  in Metern]

den Resonanzfrequenzen des Rohres und durch die Resonanzüberhöhung gegeben sind. Damit läßt sich das charakteristische Anfahrgeräusch von Axialrädern, die in Rohren eingebaut sind, erklären.

Die Dauerdrehzahl des Verdichters muß also so ausgelegt werden, daß keine wesentliche Resonanzüberhöhung auftritt, es darf also zumindest die Grundresonanz nicht mit einer Rohrresonanz zusammenfallen. Bei höheren Harmonischen werden die Verhältnisse nicht so kritisch, weil durch die erhöhte Abstrahlung die Resonanzüberhöhungen immer geringer werden.

Außerdem ist aus dem Diagramm folgendes zu entnehmen:

Rohre mit größerem Radius ergeben bei gleichen Frequenzen geringere Resonanzüberhöhungen als solche mit sehr kleinem Radius.

Dem entspricht aber bei gleicher Durchflußmenge  $\dot{V}$  ein kleineres  $c_m$ , da  $\pi R^2 c_m = \dot{V}$ .

Nach Gl. (49) nimmt aber  $\eta_1$ , der Anteil der Schallenergie, mit zunehmendem  $c_m$  ab. Es muß also zu einem vorgegebenen Verhältnis  $\Delta p / \dot{V}$  einen Wert von  $R^*$  geben, wo  $\eta_1 \propto R^2$ , der Anteil der Schallenergie, bei Rohrresonanz ein Minimum wird.

Die zugeführte Schalleistung beträgt:

$$N_z = r_m \tilde{V}^2 = \frac{P^2}{2 \rho c_v}$$



Steigt der Druck  $P$  auf  $P_{\text{res}} = \kappa P$  durch die Resonanzüberhöhung<sup>13</sup>, so verhalten sich die Schalleistungen wie

$$\frac{N_{\text{res}}}{N_z} = \frac{P_{\text{res}}^2}{P^2} = \kappa^2. \quad (48)$$

Nun möge der Teil der Antriebsleistung berechnet werden, der bei Resonanzüberhöhung in Schallenergie übergeht.

$$\eta_1 = \frac{(\Delta p)^2}{2 \varrho c} \cdot \frac{1}{(\Delta p) \cdot c_m}$$

ist jener Teil der Antriebsleistung, der als Schallenergie auftritt, wenn keine Resonanzüberhöhung vorhanden ist.

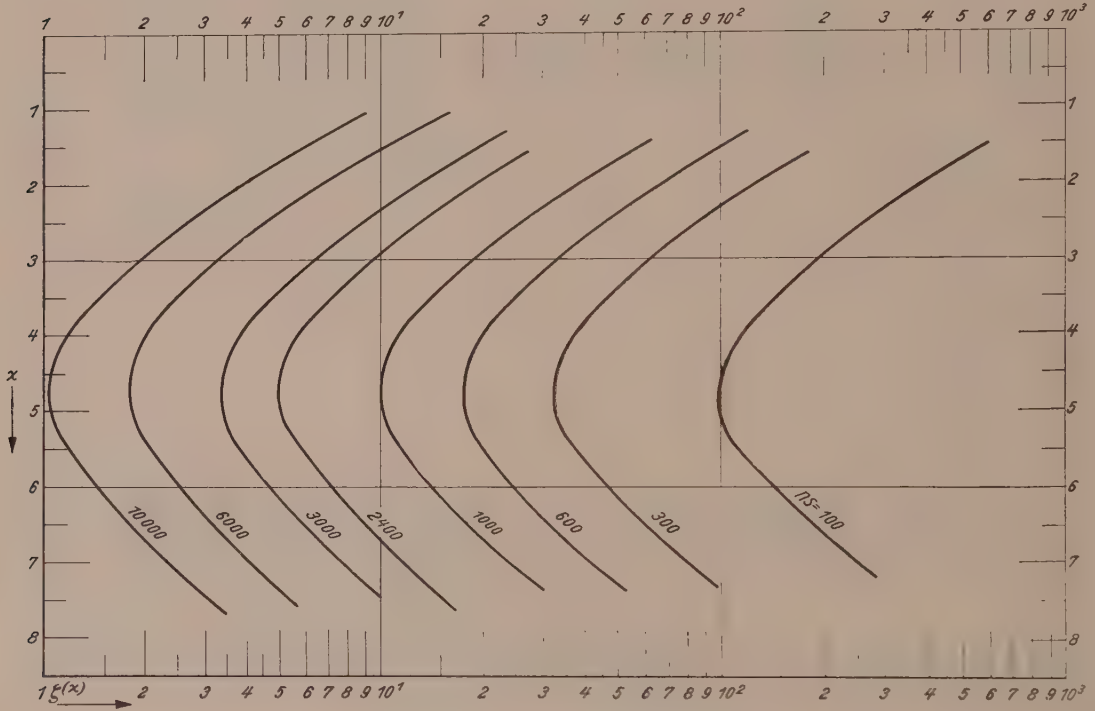


Abb. 9. Energiedichte des Schallfeldes im Rohr

Bei Resonanzüberhöhung ist dieser Wert noch mit  $\kappa^2$  zu multiplizieren.

$$\eta_{\text{res}} = \frac{1}{2 \varrho c} \cdot \frac{\Delta p}{c_m} \cdot \kappa^2 = \frac{1}{2 \varrho c} \cdot \frac{\Delta p}{\dot{V}} \cdot \pi R^2 \kappa^2,$$

$$\kappa = \frac{\left(1 + \frac{J_1(2KR)}{KR}\right)^2}{1 - \frac{J_1(2KR)}{KR}} \quad [\text{s. Gl. (46a)}],$$

$$\eta_{\text{res}} = \frac{1}{2 \varrho c} \cdot \frac{\Delta p}{\dot{V}} \cdot \pi \cdot \left[ R \cdot \frac{\left(1 + \frac{J_1(2KR)}{KR}\right)^2}{1 - \frac{J_1(2KR)}{KR}} \right]^2. \quad (49)$$

<sup>13</sup> E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 118.

$\eta_{\text{res}}$  besitzt nun dort ein Minimum, wo die Funktion

$$\zeta^2(KR) = \left[ R \cdot \frac{\left(1 + \frac{J_1(2KR)}{KR}\right)^2}{1 - \frac{J_1(2KR)}{KR}} \right]^2 \quad (50)$$

eines besitzt. Setzt man für  $2KR = x$ , dann ist

$$\frac{J_1(2KR)}{KR} = \frac{2J_1(x)}{x} = A_1(x),$$

wobei  $A_1(x)$  tabelliert ist<sup>14</sup>.

$$\zeta(KR) = \zeta_1(x) = \frac{x}{2K} \cdot \frac{(1 + A_1(x))^2}{1 - A_1(x)}. \quad (51)$$

Diese Funktion ist für  $0 \leq x \leq 7$  und mit  $K$  als Parameter in Abb. 9 aufgetragen ( $K \propto n$ ).

Für  $x = 2KR = 4.75$  ergibt sich das obenerwähnte Minimum.

Für  $x \rightarrow 0$  geht  $\zeta(x)$  gegen Unendlich, wie sich zeigen läßt. Es ergibt sich aber trotzdem für die Drehzahl  $n = 0$  ein endliches  $\eta_{\text{res}} = 0$ , da mit abnehmender Drehzahl  $\Delta p$  quadratisch gegen Null geht.

Abb. 10 zeigt noch schematisch die Verhältnisse, die beim Anlaufen eines Rades auftreten.

Jedesmal wenn die anregende Frequenz in die Nähe einer Rohrresonanz kommt, tritt eine Resonanzüberhöhung auf.

Die Halbwertsbreite der Resonanzkurven ist bei tiefen Frequenzen wegen der geringeren Dämpfung kleiner als bei hohen.

Bei hohen Frequenzen geht die Resonanzüberhöhung wegen oben erwähnter Dämpfung asymptotisch gegen 1.

Als Dämpfung wurde in dieser Arbeit nur mit der Strahlungsdämpfung, also der Abstrahlung des Rohrendes, gerechnet. Es kommt hier eigentlich noch die Dämpfung durch die Reibung an der Rohrwand hinzu<sup>15</sup>, die aber bei tiefen Frequenzen praktisch Null ist, sofern der Rohrdurchmesser größenordnungsmäßig nicht kleiner als etwa ein Zehntel der Wellenlänge ist.

Wenn man die Ergebnisse nochmals zusammenfaßt, so ergibt sich, daß man den Schalldruck, den ein Axialverdichter liefert, auf die Rotation eines Drucksprunges in der Radebene zurückführen kann. Es zeigte sich, daß man den Schalldruck aus eben erwähntem Drucksprung und einem sog. Verdrängungsanteil aufbauen muß, wobei der Verdrängungsanteil besonders bei dicken Profilen zur Geltung kommt. Der Druckrandwert an den Schaufeln muß im allgemeinen empirisch ermittelt werden.

Weiters ergab sich, daß unterhalb der Grenzfrequenz des Rohres das Schallfeld im Rohr streng eindimensionalen Charakter trägt. Für diesen Fall wurde auch die Schalleistung berechnet. Die Energiebilanz ergab, daß der Anteil der Schallenergie vom Rohrdurchmesser, von der Drehzahl des Rades und vom Druck, den es liefert, abhängt.

Es ergab sich nach dieser Rechnung ein Minimum dieses Anteiles, wenn Rohrdurchmesser und Drehzahl einer bestimmten Bedingung genügen. Alle Betrachtungen

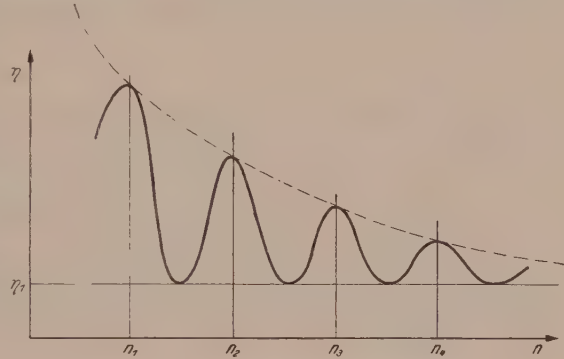


Abb. 10

<sup>14</sup> Siehe Jahnke-Emde: Funktionentafeln.

<sup>15</sup> E. Skudrzyk: Grundlagen der Akustik, S. 529.

wurden für den Fall angestellt, daß die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr vernachlässigbar klein gegen die Schallgeschwindigkeit des Mediums ist. Es wurde also der Doppler-Effekt vernachlässigt. Das könnte mittels einer Lorentz-Transformation behoben werden, weil diese die Eigenschaft hat, ruhende Systeme in gegeneinander gleichförmig bewegte überzuführen.

Es müßte also auf die Lösung bloß eine Lorentz-Transformation ausgeübt werden. Dies ist zulässig, weil die Wellengleichung Lorentzinvariant ist<sup>16</sup>.

Die Ergebnisse dieser Art von Merbt und Billing<sup>17</sup> weichen aber nur sehr wenig untereinander ab, sobald  $c_m < \frac{1}{10} c$ , weshalb in dieser Arbeit der Doppler-Effekt vernachlässigt wurde.

Bei Annäherung an eine sinusförmige Druckverteilung in der Radebene gehen die Anteile der Oberwellen gegen Null, so daß auf diese Weise die in Schall umgesetzte Energie auf ein Minimum gebracht werden könnte.

Es ergab sich ferner, daß grundsätzlich bei einem  $m$ -stufigen Verdichter mit gleichen Stufeneigenschaften nur eine Harmonische zum Verschwinden gebracht werden kann, indem die Räder um bestimmte Winkel gegeneinander verdreht werden.

(Eingegangen am 4. Oktober 1955)

## Temperaturfelder in endlichen Körpern bei bewegten Wärmequellen

Von H. Fieber und F. Selig, Wien

Mit 1 Textabbildung

**Zusammenfassung.** Eine von Sneddon angedeutete Methode zur Berechnung von Temperaturfeldern bei bewegten Wärmequellen wird auf endliche Bereiche erweitert. Behandelt werden die endliche Platte und der endliche Hohlzylinder bei verschiedenen Randbedingungen. Auf den Zusammenhang mit der Greenschen Funktion der Wärmeleitung wird hingewiesen.

Im Titel genannte Probleme können nach mehreren Methoden behandelt werden. Mit dem in der Literatur meist verwendeten Reflexionsverfahren, welches Lord Kelvin<sup>1</sup> entwickelte, können nur Temperaturfelder für solche Gebiete gefunden werden, die durch wiederholte Spiegelung den Raum einfach und lückenlos erfüllen<sup>2</sup>. Hieran knüpft sich auch ein von Rykalin<sup>3</sup> angewandtes Verfahren, das aus dem Gegenseitigkeitsprinzip der Quellwirkung resultiert. Nach Sneddon<sup>4</sup> kann man die von einer Punktquelle in  $(a, b, c)$  erzeugte Wärmemenge in der Form

$$Q(a, b, c) = q \delta(x - a) \delta(y - b) \delta(z - c) \quad (1)$$

ansetzen, wenn  $q$  die Quellstärke bedeutet. Die Symbole  $\delta(\dots)$  sind die Diracschen Deltafunktionen. Im folgenden soll die von Sneddon nur für den halibunendlichen Körper dargelegte Methode auf zwei Beispiele — endliche Platte und endlicher Hohlzylinder — angewendet und auf den Zusammenhang mit der Greenschen Funktion der Wärmeleitung hingewiesen werden (vgl. dazu Carslaw und Jaeger<sup>5</sup>).

<sup>16</sup> H. Billing: Geradlinig bewegte Schallquellen. Z. angew. Math. Mech. **29**, 269.

<sup>17</sup> H. Merbt und H. Billing: Der Propeller als rotierende Schallquelle. Z. angew. Math. Mech. **29**, 306—308.

<sup>1</sup> Lord Kelvin: Mathematical and Physical Papers.

<sup>2</sup> E. W. Hobson und H. Diesselhorst: Wärmeleitung, Enz. d. math. Wiss., Bd. V/1.

<sup>3</sup> N. N. Rykalin: Wärmegrundlage des Schweißens, 1952.

<sup>4</sup> J. N. Sneddon: Fourier Transforms, 1951.

<sup>5</sup> H. S. Carslaw und J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 1948.



## Vorbemerkungen

Da wir uns im späteren der endlichen Fourier-Transformation im engeren Sinne bzw. Hankel-Transformation bedienen werden, sei hier der Einfachheit halber an einige diesbezügliche Sätze erinnert<sup>6</sup>, die wir gleich für einen beliebigen Fourier-Kern  $p(\sigma) K(\beta\sigma)$  darstellen, welcher einer sich selbst adjungierten gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{p(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} [p(\sigma) K_\sigma(\beta\sigma)] + q(\beta, \sigma) K(\beta\sigma) = 0 \quad (2)$$

genügt. Bezeichnen wir mit  $\varphi(\beta_i)$  die Fourier-Transformierte von  $f(\sigma)$ , also

$$\varphi(\beta_i) = \underset{(\sigma_1, \sigma_2)}{\mathcal{K}_{\beta_i}^\sigma} f(\sigma) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(\sigma) p(\sigma) K(\beta_i \sigma) d\sigma, \quad (3)$$

dann lautet die Umkehrformel

$$f(\sigma) = \sum_{\beta_i \geq 0} P(\beta_i) \varphi(\beta_i) K(\beta_i \sigma), \quad (4)$$

wobei die  $\beta_i$  sich aus einer Bedingung bestimmen, die die Orthogonalität der Integralkerne im Intervall  $[\sigma_1, \sigma_2]$  gewährleisten und  $P(\beta_i)$  das reziproke Quadrat der Norm

$\underset{(\sigma_1, \sigma_2)}{\mathcal{K}_{\beta_i}^\sigma} K(\beta_i \sigma)$  ist. Man bestätigt leicht durch Produktintegration, daß für zweimal stetig differenzierbare Funktionen

$$\underset{(\sigma_1, \sigma_2)}{\mathcal{K}_{\beta_i}^\sigma} \left\{ \frac{1}{p(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} [p(\sigma) f_\sigma(\sigma)] + q(\beta, \sigma) f(\sigma) \right\} = p(\sigma) [f_\sigma(\sigma) K(\beta_i \sigma) - f(\sigma) K_\sigma(\beta_i \sigma)] \Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} \quad (5)$$

gilt. Erfüllt nun die Funktion  $f(\sigma)$  an den Rändern des Intervalls vorgegebene, sich selbst adjungierte Bedingungen, so kann durch passende Wahl der Lösung von Gl. (2) einerseits und durch entsprechende Wahl der Parameterwerte  $\beta_i$  die rechte Seite von Gl. (5) zum Verschwinden gebracht werden.  $K(\beta_i \sigma)$  erfüllt dann ebenfalls sich selbst adjungierte Randbedingungen, was die für Gl. (4) benötigte Orthogonalität sicherstellt.

Im folgenden wird verwendet:

1. Die endliche Sinustransformation im Intervall  $[0, 1]$ :  $\mathcal{S} \dots$   
(0, 1)

$$p(\sigma) \equiv 1, \quad q(\beta, \sigma) \equiv \beta^2, \quad K(\beta\sigma) \equiv \sin \beta\sigma.$$

Aus den Randbedingungen  $f(0) = f(1) = 0$  folgt  $\beta_n = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Das Quadrat der Norm ist  $\underset{(0, 1)}{\mathcal{S}_{n\pi}^\sigma} \sin n\pi\sigma = \frac{1}{2}$  und somit ist  $P(n) = 2$  (die endliche Sinustransformation wird mit Vorteil angewendet, wenn die Randtemperaturen gegeben sind).

2. Die endliche Cosinustransformation im Intervall  $[-1, 1]$ :  $\mathcal{C} \dots$   
(-1, 1)

$$p(\sigma) \equiv 1, \quad q(\beta, \sigma) \equiv \beta^2, \quad K(\beta\sigma) \equiv \cos \beta\sigma.$$

Aus den Randbedingungen  $f_\sigma(-1) - hf(-1) = 0$ ,  $f_\sigma(1) + hf(1) = 0$  folgt für  $\beta_i$  die Gleichung  $\beta_i \operatorname{tg} \beta_i - h = 0$ , oder wenn  $h = 0$ :  $\beta_n^* = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Die Quadrate der zugehörigen Normen bestimmen sich zu

$$\underset{(-1, 1)}{\mathcal{C}_{\beta_i}^\sigma} \cos \beta_i \sigma = \frac{\beta_i^2 + h^2 + h}{\beta_i^2 + h^2} \quad (h \neq 0),$$

$$\underset{(-1, 1)}{\mathcal{C}_{\beta_n^*}^\sigma} \cos \beta_n^* \sigma = 2(2 - \delta_0 \beta_n^*)^{-1} \quad (h = 0).^7$$

<sup>6</sup> E. C. Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 1937.

<sup>7</sup>  $\delta_{ik} = \begin{cases} 0: & i \neq k \\ 1: & i = k \end{cases}$  (Kronecker-Symbol).

3. Die endliche Cosinustransformation im Intervall  $[0, 1]$ :  $\mathcal{C} \dots$  gegenüber 2 ändern sich nur die Randbedingungen  $_{(0,1)}$

$$f_{\sigma}(0) = 0, \quad f_{\sigma}(1) + h f(1) = 0$$

$\beta_i$  genügt denselben Bedingungen, die Normquadrate sind

$$\mathcal{C}_{\beta_i}^{\sigma} \cos \beta_i \sigma = \frac{1}{2} \frac{\beta_i^2 + h^2 + h}{\beta_i^2 + h^2} \quad (h \neq 0),$$

$$\mathcal{C}_{\beta_n^*}^{\sigma} \cos \beta_n^* \sigma = (2 - \delta_{0 \beta_n^*})^{-1} \quad (h = 0).$$

(Die endliche Cosinustransformation erweist sich als praktisch, wenn die Wärmeströme an den Rändern vorgegeben sind.)

4. Die endliche Fourier-Transformation im engeren Sinne:  $\mathcal{F} \dots$   $_{(0, 2\pi)}$

$$p(\sigma) \equiv 1, \quad q(\beta, \sigma) \equiv \beta^2, \quad K(\beta \sigma) = e^{i\beta \sigma}.$$

Auf Grund der Periodizität  $f(0) = f(2\pi)$ ;  $f'(0) = f'(2\pi)$  folgt  $\beta = \text{ganz}$ . Das Quadrat der Norm ist

$$\mathcal{F}_n^{\sigma} e^{i n \sigma} = 2\pi.$$

5. Die endliche Hankel-Transformation im Intervall  $[1, B]$ :  $\mathcal{H} \dots$   $_{(1, B)}$

$$p(\sigma) \equiv \sigma, \quad q(\beta, \sigma) \equiv \beta^2 - \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \quad K(\beta \sigma) \equiv C_1 J_{\mu}(\beta \sigma) + C_2 N_{\mu}(\beta \sigma).$$

Mit den Randbedingungen

$$f_{\sigma}(1) - g_1 f(1) = 0; \quad f_{\sigma}(B) + g_2 f(B) = 0$$

ergibt sich für  $\beta_i$  die Gleichung

$$K_{\sigma}(\beta_i \sigma_0) + g_j K(\beta_i \sigma_0) = 0, \quad \begin{array}{l} j = 1 : \sigma_0 = 1, \\ j = 2 : \sigma_0 = B. \end{array}$$

Als Quadrat der Norm erhält man

$$\mathcal{H}_{\beta_i}^{\sigma} K(\beta_i \sigma) = \frac{1}{2 \beta_i^2} [\sigma^2 K_{\sigma}^2(\beta_i \sigma) + (\beta_i^2 \sigma^2 - \mu^2) K^2(\beta_i \sigma)]_1^B.$$

Die Fourier-Transformierte der Diracschen Deltafunktion lautet<sup>8</sup>

$$\mathcal{K}_{\beta}^{\sigma} \delta(\sigma - \sigma_0) = p(\sigma_0) K(\beta \sigma_0) \quad (\sigma_1 \leq \sigma_0 \leq \sigma_2). \quad (6)$$

Insbesondere gilt auch die Umkehrformel entsprechend Gl. (4), welche bei der Verifikation der Lösung herangezogen werden muß.

### Die endliche Platte

In einem kartesischen Koordinatensystem werde die Platte von den Ebenen  $x = \pm L_1$ ,  $y = \pm L_2$  und  $z = \pm L_3$  begrenzt. Längs der Ebene  $x = 0$  bewege sich eine Linienquelle der Stärke  $q$  in Richtung der positiven  $y$ -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  von  $y = -L_2$  nach  $y = L_2$ . Dann gilt mit Gl. (1)

$$T_t = a^2 (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \frac{q}{\gamma c} \delta(x) \delta(y + L_2 - vt) \quad t \leq \frac{2L_2}{v}. \quad (7)$$

An den Begrenzungen des Körpers nehmen wir Randbedingungen dritter Art an, die einem Wärmeübergang in das angrenzende Medium entsprechen. Die Wärmeübergangszahlen wollen wir an gegenüberliegenden Flächen als gleich annehmen,

<sup>8</sup> P. M. Morse und H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, Bd. I, 1953.

so daß bezüglich der Ebene  $x = 0$  Symmetrie herrscht. Dies bedeutet, daß nur die Hälfte der Platte, z. B.  $x > 0$ , betrachtet werden muß und  $T_x = 0$  an der Stelle  $x = 0$  vorgegeben werden kann. Ferner sei die Temperatur des umgebenden Mediums gleich Null, was nur eine Verschiebung der Temperaturskala bedeutet. Man erhält mit

$$x = L_1 \xi, \quad y = L_2 \eta, \quad z = L_3 \zeta$$

aus Gl. (7)

$$T_t = a^2 \left( \frac{1}{L_1^2} T_{\xi\xi} + \frac{1}{L_2^2} T_{\eta\eta} + \frac{1}{L_3^2} T_{\zeta\zeta} \right) + \frac{q}{\gamma c} \delta(\xi) \delta \left( \eta + 1 - \frac{v}{L_2} t \right) \quad (8)$$

und die zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen lauten:

$$T_\xi(0, \eta, \zeta; t) = 0, \quad T_\xi(1, \eta, \zeta; t) + h_1 T(1, \eta, \zeta; t) = 0, \quad (9a)$$

$$T_\eta(\xi, -1, \zeta; t) - h_2 T(\xi, -1, \zeta; t) = 0, \quad T_\eta(\xi, 1, \zeta; t) + h_2 T(\xi, 1, \zeta; t) = 0, \quad (9b)$$

$$T_\zeta(\xi, \eta, -1; t) - h_3 T(\xi, \eta, -1; t) = 0, \quad T_\zeta(\xi, \eta, 1; t) + h_3 T(\xi, \eta, 1; t) = 0, \quad (9c)$$

$$T(\xi, \eta, \zeta; 0) = 0, \quad (9d)$$

wobei die  $h_i = L_i \frac{\alpha_i}{\kappa}$  und  $\alpha_i$  die Wärmeübergangszahlen sind und  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit ist. Wendet man auf Gl. (8) die Transformation

$$\mathcal{C}_{\lambda_i}^{\xi} \mathcal{C}_{\mu_j}^{\eta} \mathcal{C}_{\nu_k}^{\zeta} T(\xi, \eta, \zeta; t) = D(\lambda_i, \mu_j, \nu_k; t)$$

(0,1) (-1,1) (-1,1)

an und unterwirft man die Parameter Bedingungen von der Form

$$\lambda_i \operatorname{tg} \lambda_i = h_1; \quad \mu_j \operatorname{tg} \mu_j = h_2; \quad \nu_k \operatorname{tg} \nu_k = h_3,$$

so ergibt sich wegen Gl. (5), (9) und (6)

$$D_t = -k^2 D + \frac{2q}{\gamma c} \frac{\sin \nu_k}{\nu_k} \cos \mu_j \left( \frac{v}{L_2} t - 1 \right) \quad (10)$$

mit

$$k^2 = a^2 \left( \frac{\lambda_i^2}{L_1^2} + \frac{\mu_j^2}{L_2^2} + \frac{\nu_k^2}{L_3^2} \right).$$

Die entsprechend Gl. (9d) für  $t = 0$  verschwindende Lösung lautet:

$$D(\lambda_i, \mu_j, \nu_k; t) = \frac{2q}{\gamma c} \frac{\sin \nu_k}{\nu_k} \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} \cos \mu_j \left( \frac{v}{L_2} \tau - 1 \right) d\tau \quad (11)$$

und schließlich durch Rücktransformation

$$T(\xi, \eta, \zeta; t) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} P(\lambda_i) Q(\mu_j) R(\nu_k) D(\lambda_i, \mu_j, \nu_k; t) \cos \lambda_i \xi \cos \mu_j \eta \cos \nu_k \zeta, \quad (12)$$

wobei die Abkürzungen

$$P(\lambda_i) = 2 \frac{\lambda_i^2 + h_1^2}{\lambda_i^2 + h_1^2 + h_1}; \quad Q(\mu_j) = \frac{\mu_j^2 + h_2^2}{\mu_j^2 + h_2^2 + h_2}; \quad R(\nu_k) = \frac{\nu_k^2 + h_3^2}{\nu_k^2 + h_3^2 + h_3}$$

verwendet wurden. Gl. (12) gilt nur so lange, als  $t \leq \frac{2L_2}{v}$ , das heißt bis die Wärmequelle den Rand  $y = L_2$  erreicht hat. Der sich daran anschließende Abkühlungsvorgang wird durch die homogene Gl. (8) unter Beibehaltung der Randbedingungen beschrieben. Als Anfangsbedingung tritt  $T\left(\xi, \eta, \zeta; \frac{2L_2}{v}\right)$  entsprechend Gl. (12); somit erhält man mit Gl. (11)

$$T(\xi, \eta, \zeta; t) = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} P(\lambda_i) Q(\mu_j) R(\nu_k) D\left(\lambda_i, \mu_j, \nu_k; \frac{2L_2}{v}\right) e^{-k^2\left(t - \frac{2L_2}{v}\right)} \cos \lambda_i \xi \cos \mu_j \eta \cos \nu_k \zeta.$$



Der Zusammenhang mit der Greenschen Funktion wird deutlich, wenn man in Gl. (8) als Störung

$$\frac{q}{\gamma c} \delta(\xi - \xi') \delta(\eta - \eta') \delta(\zeta - \zeta') \delta(t - t_0)$$

setzt. Statt (11) erhält man

$$D(\lambda_i, \mu_j, \nu_k; t) = \begin{cases} 0 & t < t_0, \\ \frac{q}{\gamma c} e^{-k^2(t-t_0)} \cos \lambda_i \xi' \cos \mu_j \eta' \cos \nu_k \zeta' & t \geq t_0. \end{cases}$$

Die Temperatur im Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  zur Zeit  $t$ , die den geforderten Rand- und Anfangsbedingungen genügt, herrührend von einer momentanen Punktquelle im Punkt  $(\xi', \eta', \zeta')$ , die zur Zeit  $t = t_0$  wirkte, also die Greensche Funktion der endlichen, rechteckigen Platte<sup>9</sup>, ist gegeben durch

$$T(\xi, \eta, \zeta; t) = \begin{cases} 0 & t < t_0, \\ \frac{q}{\gamma c} \sum_{\lambda_i, \mu_j, \nu_k} P(\lambda_i) Q(\mu_j) R(\nu_k) e^{-k^2(t-t_0)} \cdot \\ \cdot \cos \lambda_i \xi' \cos \lambda_i \xi \cos \mu_j \eta' \cos \mu_j \eta \cos \nu_k \zeta' \cos \nu_k \zeta & t \geq t_0. \end{cases}$$

Zur numerischen Berechnung des Temperaturfeldes sei bemerkt, daß die Greensche Funktion der Platte einfach das Produkt der Greenschen Funktionen der endlichen linearen Bereiche für gleiche Randbedingungen ist. Bei Randbedingungen erster und zweiter Art ist eine Darstellung durch Thetafunktionen möglich, die wegen der Transformationseigenschaften der Thetafunktionen in rasch konvergierende Reihen umgeschrieben werden kann.

### Der endliche Hohlzylinder

a) Längsnaht. In einem System von Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  werde der Hohlzylinder von den Flächen  $r = R_1$  und  $r = R_2$  sowie  $z = \pm L$  begrenzt. Eine Wärmequelle von der Intensität  $q$  bewege sich auf  $r = R_2$  längs  $\varphi = 0$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  von  $z = -L$  nach  $z = L$ . Dann lautet die zu Gl. (8) mit den dimensionslosen Variablen  $\varrho = \frac{r}{R_1}$ ,  $\zeta = \frac{z}{L}$  analoge Gleichung

$$T_t = \frac{\alpha^2}{R_1^2} \left[ \frac{1}{\varrho} (\varrho T_\varrho)_\varrho + \frac{1}{\varrho^2} T_{\varphi\varphi} + A^2 T_{\zeta\zeta} \right] + \frac{q}{\gamma c} \delta(\varrho - B) \delta(\varphi) \delta\left(\zeta + 1 - \frac{v}{L} t\right) \quad (13)$$

mit

$$A = \frac{R_1}{L}; \quad B = \frac{R_2}{R_1}.$$

Als Randbedingungen mögen gelten

$$T_\zeta(\varrho, \varphi, -1; t) - h T(\varrho, \varphi, -1; t) = 0, \quad T_\zeta(\varrho, \varphi, 1; t) + h T(\varrho, \varphi, 1; t) = 0, \quad (14a)$$

$$T_\varrho(1, \varphi, \zeta; t) - g_1 T(1, \varphi, \zeta; t) = 0, \quad T_\varrho(B, \varphi, \zeta; t) + g_2 T(B, \varphi, \zeta; t) = 0, \quad (14b)$$

$$T_\varphi(\varrho, 0, \zeta; t) = 0, \quad T_\varphi(\varrho, \pi, \zeta; t) = 0, \quad (14c)$$

$$T(\varrho, \varphi, \zeta; 0) = 0; \quad (14d)$$

hierbei wurde wieder  $h = L \frac{\alpha_z}{\alpha}$  und  $g_i = R_1 \frac{\alpha_i}{\alpha}$  gesetzt, wobei  $\alpha_i$  und  $\alpha_z$  die Wärmeübergangszahlen in radialer bzw. axialer Richtung sind. Durch Anwendung der Transformation

$$\mathcal{C}_{\mu}^{\varphi} \mathcal{C}_{\nu k}^{\zeta} T(\varrho, \varphi, \zeta; t) = D(\varrho, \mu, \nu_k; t)$$

(0,  $\pi$ )  $\rightarrow$  (-1, 1)

<sup>9</sup> Zur Definition der Greenschen Funktion vgl. Anm. 5, 6 und 8.

erhält man aus Gl. (13) unter Berücksichtigung von Gl. (14a, c)

$$D_t = \frac{a^2}{R_1^2} \left[ \frac{1}{\varrho} (\varrho D_\varrho)_\varrho - \frac{\mu^2}{\varrho^2} D - A^2 v_k^2 D \right] + \frac{q}{\gamma c} \delta(\varrho - B) \cos v_k \left( \frac{v}{L} t - 1 \right), \quad (15)$$

wobei  $\mu$  alle ganzen positiven Zahlen und  $v_k$  Wurzeln der Gleichung  $v_k \operatorname{tg} v_k = h$  darstellen. Die Variable  $\varrho$  wird mittels einer endlichen Hankel-Transformation eliminiert:

$$\mathcal{H}_{\lambda_i}^{\varrho} D(\varrho, \mu, v_k; t) = \int_1^B D(\varrho, \mu, v_k; t) \varrho \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) d\varrho = \tilde{D}(\lambda_i, \mu, v_k; t).$$

Hierbei stellt  $\mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho)$  eine passend gewählte Lösung der Besselschen Differentialgleichung dar

$$\frac{1}{\varrho} [\varrho \mathfrak{B}_{\mu/\varrho}(\lambda_i \varrho)]_\varrho + \left( \lambda_i^2 - \frac{\mu^2}{\varrho^2} \right) \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) = 0. \quad (16)$$

Mit der Bezeichnung  $\mathfrak{B}_{\mu/\varrho}(\lambda_i \varrho) = \lambda_i \mathfrak{B}_\mu'(\lambda_i \varrho)$  erhält man auf Grund von Gl. (5) unter Berücksichtigung von Gl. (16)

$$\mathcal{H}_{\lambda_i}^{\varrho} \left[ \frac{1}{\varrho} (\varrho D_\varrho)_\varrho - \frac{\mu^2}{\varrho^2} D \right] = \varrho [D_\varrho \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) - \lambda_i D \mathfrak{B}_\mu'(\lambda_i \varrho)] \Big|_1^B - \lambda_i^2 \tilde{D}. \quad (17)$$

Die passende Wahl der  $\mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho)$  besteht nun darin, daß der integrierte Teil von Gl. (17) verschwindet. Dies gelingt, wenn

$$\mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) = [g_1 N_\mu(\lambda_i) - \lambda_i N_\mu'(\lambda_i)] J_\mu(\lambda_i \varrho) - [g_1 J_\mu(\lambda_i) - \lambda_i J_\mu'(\lambda_i)] N_\mu(\lambda_i \varrho) \quad (18)$$

und  $\lambda_i$  Wurzel von

$$g_2 \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B) + \lambda_i \mathfrak{B}_\mu'(\lambda_i B) = 0 \quad (19)$$

ist. Führt man nun die Transformation durch, so geht Gl. (15) über in

$$\tilde{D}_t = -m^2 \tilde{D} + \frac{q B}{\gamma c} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B) \cos v_k \left( \frac{v}{L} t - 1 \right)$$

mit

$$m^2 = \frac{a^2}{R_1^2} (A^2 v_k^2 + \lambda_i^2).$$

Die entsprechend Gl. (14d) geforderte Anfangsbedingung erfüllt die Lösung

$$\tilde{D}(\lambda_i, \mu, v_k; t) = \frac{q B}{\gamma c} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B) \int_0^t e^{-m^2(t-\tau)} \cos v_k \left( \frac{v}{L} \tau - 1 \right) d\tau. \quad (20)$$

Das für die Rücktransformation benötigte Quadrat der Norm kann auf Grund der Vorbemerkung 5, mit Rücksicht auf Gl. (18) und (19), sowie wegen

$$J_\mu'(\lambda_i) N_\mu(\lambda_i) - J_\mu(\lambda_i) N_\mu'(\lambda_i) = -\frac{2}{\pi \lambda_i},$$

also

$$\mathfrak{B}_\mu(\lambda_i) = -\frac{2}{\pi}; \quad \mathfrak{B}_\mu'(\lambda_i) = -\frac{2}{\pi \lambda_i} g_1$$

geschrieben werden

$$\mathcal{H}_{\lambda_i}^{\varrho} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) \equiv \frac{1}{\Phi(\lambda_i, \mu)} = \frac{1}{2 \lambda_i^2} \left[ (\lambda_i^2 B^2 - \mu^2 + g_2^2 B^2) \mathfrak{B}_\mu^2(\lambda_i B) + (\lambda_i^2 - \mu^2 - g_1^2) \frac{4}{\pi^2} \right].$$

Führt man nun alle Rücktransformationen durch, so erhält man aus Gl. (20)

$$T(\varrho, \varphi, \zeta; t) = \sum_{i, k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Phi(\lambda_i, \mu) X(\mu) \Psi(v_k) \tilde{D}(\lambda_i, \mu, v_k; t) \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) \cos \mu \varphi \cos v_k \zeta \quad (21)$$

$$\left( t \leq \frac{2L}{v} \right).$$

Entsprechend Vorbemerkung 2, 3 bedeutet

$$X(\mu) = \frac{1}{\pi} (2 - \delta_{0\mu}), \quad \Psi(v_k) = \frac{v_k^2 + h^2}{v_k^2 + h^2 + h}.$$

In ähnlicher Weise wie früher erhält man den mit  $t = \frac{2L}{v}$  beginnenden Abkühlungsvorgang

$$T(\varrho, \varphi, \zeta; t) = \sum_{i, k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Phi(\lambda_i, \mu) X(\mu) \Psi(v_k) \tilde{D}\left(\lambda_i, \mu, v_k; \frac{2L}{v}\right) e^{-m^2\left(t - \frac{2L}{v}\right)} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) \cos \mu \varphi \cos v_k \zeta, \\ t > \frac{2L}{v}.$$

b) Quernaht. Der Unterschied gegenüber dem vorigen Beispiel besteht darin, daß sich die Quelle mit der Intensität  $q$  auf  $r = R_2$  und  $z = 0$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  von  $\varphi = 0$  ausgehend bewege. Wegen der Symmetrie in  $z$  ist das Problem mit den gleichen Bezeichnungen gekennzeichnet durch

$$T_t = \frac{\alpha^2}{R_1^2} \left[ \frac{1}{\varrho} (\varrho T_\varrho)_\varrho + \frac{1}{\varrho^2} T_{\varphi\varphi} + A^2 T_{\zeta\zeta} \right] + \frac{q}{\gamma c} \delta(\varrho - B) \delta(\varphi - \omega t) \delta(\zeta), \\ T_\varrho(1, \varphi, \zeta; t) - g_1 T(1, \varphi, \zeta; t) = 0, \quad T_\varrho(B, \varphi, \zeta; t) + g_2 T(B, \varphi, \zeta; t) = 0, \\ T_\zeta(\varrho, \varphi, 0; t) = 0, \quad T_\zeta(\varrho, \varphi, 1; t) + h T(\varrho, \varphi, 1; t) = 0, \\ T(\varrho, \varphi, \zeta; 0) = 0.$$

Durch Anwendung der Transformation

$$\underset{(1, B)}{H_{\lambda_i}^0} \underset{(0, 2\pi)}{F_\mu^\varphi} \underset{(0, 1)}{G_{v_k}^\zeta} T(\varrho, \varphi, \zeta; t) = D(\lambda_i, \mu, v_k; t)$$

erhält man analog zu a)

$$D_t = -m^2 D + \frac{qB}{\gamma c} e^{i\mu\omega t} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B),$$

wobei

$$g_2 \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B) + \lambda_i \mathfrak{B}_\mu'(\lambda_i B) = 0,$$

$$\mu = \text{ganz}, \quad v_k \operatorname{tg} v_k = h,$$

$$m^2 = \frac{\alpha^2}{R_1^2} (\lambda_i^2 + A^2 v_k^2).$$

Hieraus findet man sofort die für  $t = 0$  verschwindende Lösung

$$D = \frac{qB}{\gamma c} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B) \frac{e^{i\mu\omega t} - e^{-m^2 t}}{i\mu\omega + m^2}$$

und durch Rücktransformation

$$T(\varrho, \varphi, \zeta; t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda_i} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{v_k} \Phi(\lambda_i, \mu) \Psi(v_k) D(\lambda_i, \mu, v_k; t) \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) e^{-i\mu\varphi} \cos v_k \zeta = \\ = \frac{qB}{2\pi\gamma c} \sum_{\lambda_i} \sum_0^{\infty} \sum_{v_k} \Phi(\lambda_i, \mu) (2 - \delta_{0\mu}) \Psi(v_k) \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i B) \cdot \\ \operatorname{Re} \cdot \left\{ \frac{e^{i\mu\omega t} - e^{-m^2 t}}{i\mu\omega + m^2} e^{-i\mu\varphi} \right\} \mathfrak{B}_\mu(\lambda_i \varrho) \cos v_k \zeta. \quad (22)$$



Bei Beschränkung auf einen Umlauf der Quelle tritt wieder für  $t > \frac{2\pi}{\omega}$  der Abkühlungsvorgang ein.

### Numerisches Beispiel

Wir betrachten den dünnen Kreisring unter Berücksichtigung der Wärmeabgabe nach außen:

$$T_t = \alpha^2 T_{\varphi\varphi} + \frac{q}{\gamma c} \delta(\varphi - \omega t) - \alpha F T$$

mit  $T(\varphi, 0) = 0$ . Hierbei bedeutet  $\alpha$  die Wärmeübergangszahl in das umgebende Medium und  $F$  die Oberfläche des Ringes. Die Lösung ergibt sich mittels der Fourier-Transformation  $\mathbf{F}_{\mu}^{\varphi}$  auf gleichem Wege zu

$$T(\varphi; t) = \frac{q}{2\pi\gamma c} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha F t}}{\alpha F} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{A_{\mu}} [\sin(\mu(\omega t - \varphi) + \delta_{\mu}) + \sin(\mu\varphi - \delta_{\mu}) e^{-\mu\omega \operatorname{tg} \delta_{\mu} t}] \right\},$$

$$A_{\mu} = \sqrt{(\mu^2 \alpha^2 + \alpha F)^2 + \mu^2 \omega^2}; \quad \operatorname{tg} \delta_{\mu} = \frac{\mu^2 \alpha^2 + \alpha F}{\mu \omega}.$$
(23)

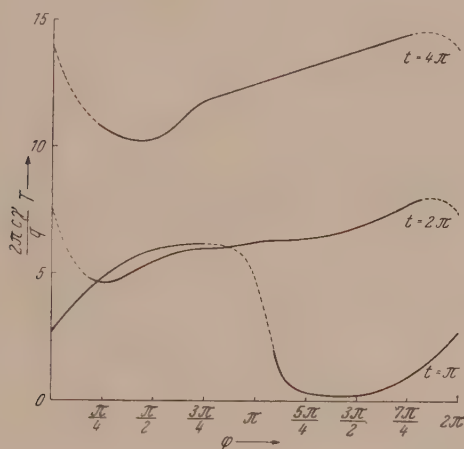


Abb. 1. Temperaturverlauf für den Kreisring  $\alpha^2 = 0.12$

Betrachten wir den Spezialfall  $\omega = 1$  und  $\alpha = 0$ , dann findet man entweder direkt oder durch Grenzübergang in (23)

$$T(\varphi; t) = \frac{q}{2\pi\gamma c} \left\{ t + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\mu \sqrt{\mu^2 \alpha^4 + 1}} [\sin(\mu(t - \varphi) + \delta_{\mu}) + \sin(\mu\varphi - \delta_{\mu}) e^{-\mu^2 \alpha^2 t}] \right\}.$$

Es wurde der Temperaturverlauf  $T(\varphi)$  für die Zeiten  $t = \pi, 2\pi$  und  $4\pi$  (zweimaliger Umlauf) näherungsweise berechnet, der in Abb. 1 angegeben ist. Für den genauen Verlauf in der Umgebung der Quelle reicht die verwendete Näherung nicht aus. Das Maximum wandert bei einer Verbesserung gegen den Quellpunkt.

Als Anwendungsmöglichkeit dieser Überlegungen können Schweißprobleme in Betracht gezogen werden.

(Eingegangen am 22. November 1955)

# Ein analytisches Modell für elektronenoptische Ablenkkfelder

Von H. Grömm und H. Spurny, Wien

Mit 4 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Ein analytischer Ausdruck, der einen für elektronenoptische Ablenkelemente typischen glockenförmigen Verlauf liefert, wird untersucht. Die Gaußsche Dioptrik kann in aller Strenge beherrscht werden. Die Glaserschen Fehlerkoeffizienten dritter Ordnung lassen sich zum größten Teil ebenfalls streng ermitteln.

Die meisten Ablenkkfelder der angewandten Elektronenoptik (Kathodenstrahloszillograph, Fernsehröhre usw.) zeigen längs der Feldachse einen typisch glockenförmigen Verlauf. Im Gegensatz zu den rotationssymmetrischen Linsenfeldern, gibt es bei den Ablenkkfeldern zahlreiche Fälle, die eine strenge Durchrechnung der Gaußschen und zum Teil auch der Glaser-Seidelschen

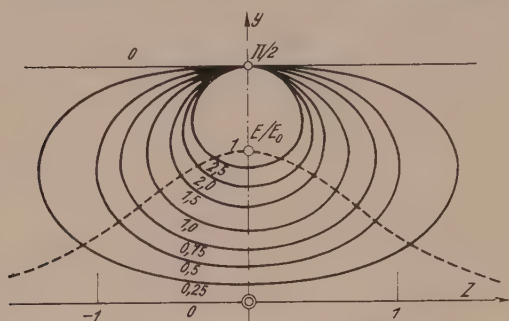


Abb. 1. Äquipotentiallinien und axialer Verlauf der Feldstärke (strichliert) im Ablenkkfeld (1)

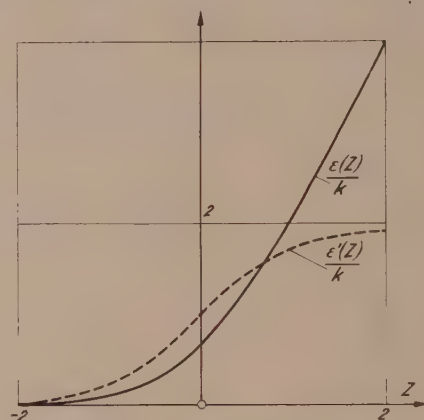


Abb. 2. Verlauf und Steigung der Paraxialbahnen im Feld (1)

Dioptrik zulassen<sup>1</sup>. Dazu gehört unter anderem eine ebene (in der  $x$ -Richtung unendlich ausgedehnte) Elektrodenanordnung, die längs der Feldachse das Feld (vgl. Abb. 1)

$$E = \frac{E_0}{\text{ch}^2 z/h} \quad (1)$$

erzeugt. Dabei bedeutet  $h$  eine charakteristische Länge. Um die Fortsetzung von (1) im ganzen Raum zu finden, führen wir an Stelle von  $z/h$  die komplexe Variable  $\xi + i\eta$  ein und finden durch Integration das komplexe Potential

$$f(z/h) = i \int_0^{z/h} \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = i \text{th } z/h = - \frac{\sin 2\eta - i \text{sh } 2\xi}{\text{ch } 2\xi + \cos 2\eta} \quad (2)$$

Man erkennt durch Ableiten, daß der Feldverlauf (1) durch den realen Potentialanteil in (2) geliefert wird. Bezeichnen wir die Beschleunigungsspannung mit  $U$  und führen wir die dimensionslosen Größen  $Z = z/h$ ,  $Y = y/h$  ein, so ergibt sich das Potential

$$\varphi = U - E_0 h \frac{\sin 2Y}{\text{ch } 2Z + \cos 2Y} \quad (3)$$

das durch Abb. 1 veranschaulicht wird. Ein derartiger Potentialverlauf (der sich in Streifen der Breite  $2\pi$ , die parallel zur  $x$ -Achse liegen, periodisch wiederholt) kann zwar wegen der Singularitäten in  $(0, \pm\pi/2)$  durch eine materielle Elektrodenanord-

<sup>1</sup> Vgl. H. Grömm, H. Kremser und H. Spurny: Arbeit im Druck. Ferner H. Grömm und H. Kremser: Optik-Arbeit im Druck.

nung nicht realisiert werden, doch kann der in der Umgebung der Achse liegende Teil zur Approximation realer Felder dienen<sup>2</sup>.

Die Paraxialbahnen im Ablenkfeld lassen sich bekanntlich in der Gestalt

$$y = y_0 + y_0' (z - z_0) + e(z) \quad \text{mit} \quad e(z) = \int_{z_0}^z \frac{E(\zeta)}{2U} (\zeta - z) d\zeta \quad (4)$$

darstellen<sup>3</sup>. In unserem Fall ergibt sich

$$\frac{1}{k} \varepsilon(Z) = (Z - Z_0) \operatorname{th} Z_0 - \ln \frac{\operatorname{ch} Z}{\operatorname{ch} Z_0} \quad (5)$$

und

$$\frac{1}{k} \varepsilon'(Z) = \operatorname{th} Z_0 - \operatorname{th} Z, \quad (6)$$

wobei zur Abkürzung

$$\varepsilon = e/h; \quad k = \frac{E_0 h}{2U} \quad (7)$$

eingeführt wurde. Die dimensionslose Größe  $k$  charakterisiert dabei die Ablenkempfindlichkeit. Bei Einfall aus dem feldfreien Raum ( $Z_0 = -\infty$ ) vereinfachen sich (5) und (6) zu (vgl. Abb. 2)

$$\frac{1}{k} \varepsilon(Z) = -(Z + \ln 2 \operatorname{ch} Z); \quad \frac{1}{k} \varepsilon'(Z) = -(1 + \operatorname{th} Z). \quad (8)$$

In diesem Fall ergeben sich die Asymptotenrichtungen zu

$$\varepsilon'(\infty) = -2k; \quad (9)$$

der Hauptpunkt liegt wegen der Feldsymmetrie im Ursprung. Die Steigung der Bahnen in der Feldmitte ergibt sich zu  $\varepsilon'(0) = -k$ . Die Höhe des Achsabschnittes in Feldmitte beträgt

$$\varepsilon(0) = -k \ln 2. \quad (10)$$

Wir haben nun noch die Ablenkfehler-Integrale<sup>3</sup> auszuwerten. Es ergibt sich für das *elektrische* Ablenkfeld vom Typus (1):

$$a_2 = 0; \quad a_6 = 0; \quad a_7 = 0; \quad a_9 = 0; \quad a_{13} = 0, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a_3}{k^2} &= \frac{1}{6 \operatorname{ch} Z_1} + \left( \frac{1}{\operatorname{ch}^2 Z_1} + \frac{4}{3} \right) (Z_1 + \ln 2 \operatorname{ch} Z_1), \\ -\frac{a_4}{k^2 h} &= (\ln \operatorname{ch} Z_1 + Z_1) (2 - \operatorname{th} Z_1) - \frac{3}{2} (\operatorname{th} Z_1 + 1) + 3 \ln 2, \\ -\frac{a_8}{k} &= \ln 2 \operatorname{ch} Z_1 + Z_1, \\ -\frac{a_{10}}{k} &= \operatorname{th} Z_1 + 1 = -\frac{a_{12}}{k}, \\ \frac{h a_{11}}{k} &= \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 Z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Fehler-Koeffizienten  $a_1$  und  $a_5$  können nicht in elementaren Funktionen dargestellt

<sup>2</sup> Das Feld (1) kann z. B. zur Approximation des von G. Wendt, Telefunkenröhre 15, 100 (1939), verwendeten und ausgemessenen Ablenkfeldes benützt werden.

<sup>3</sup> Bezüglich der allgemeinen Formeln für die paraxiale und die Dioptrik dritter Ordnung vgl. W. Glaser: Grundlagen der Elektronenoptik, Kap. XXIII. Springer-Verlag. 1952.



werden und wurden daher numerisch ermittelt. Die sich ergebenden Größen sind in Abb. 3 als Funktionen der Lage des Auffangschirmes  $Z_1$  dargestellt.

Falls ein *magnetisches* Ablenkfeld in der Umgebung der Achse durch einen Ausdruck der Gestalt (1) approximiert werden soll, haben wir  $E_0$  durch  $B_0$  und die Ablenkempfindlichkeit  $k$  durch

$$\kappa = B_0 h \sqrt{\frac{e}{2 m U}} \quad (13)$$

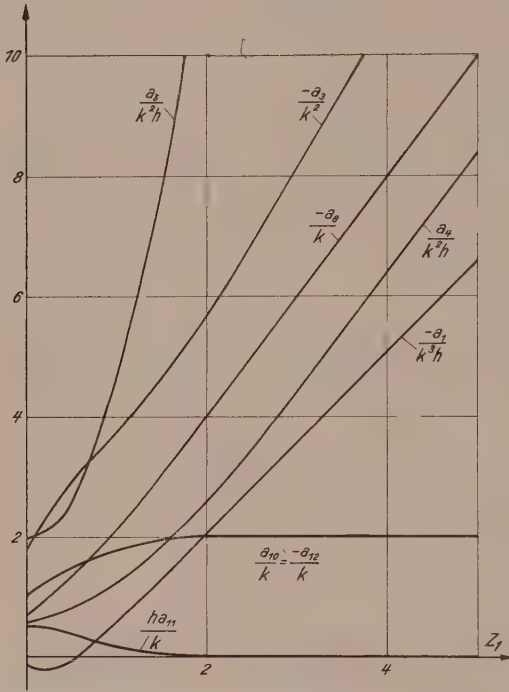


Abb. 3. Ablenkfehler-Koeffizienten als Funktion der Schirmentfernung von der Feldmitte für das rein-elektrische Ablenkfeld

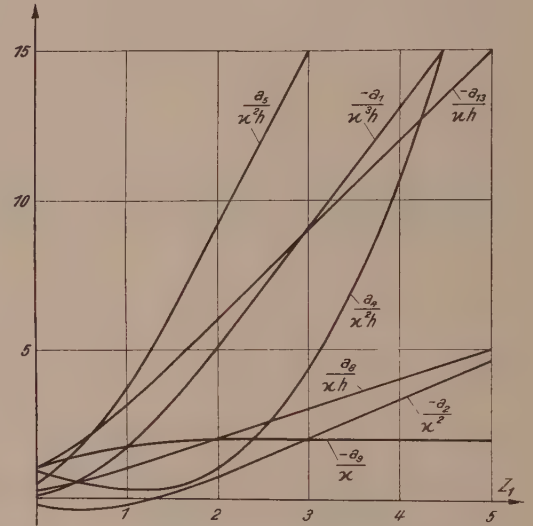


Abb. 4. Ablenkfehler-Koeffizienten als Funktion der Schirmentfernung von der Feldmitte für das rein-magnetische Ablenkfeld

zu ersetzen. Die Paraxialbahnen bleiben unverändert. Die Bildfehler-Integrale ergeben sich in diesem Falle nach<sup>3</sup> in der Gestalt:

$$a_3 = 0; \quad a_6 = 0; \quad a_7 = 0; \quad a_{10} = 0; \quad a_{11} = 0; \quad a_{12} = 0. \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a_1}{\kappa^3 h} &= \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2 Z_1} + 2 (\ln 2 \operatorname{ch} Z_1 + Z_1) - \frac{3}{2} (\operatorname{th} Z_1 + 1), \\ \frac{a_2}{\kappa^2} &= \operatorname{th} Z_1 + 1 - \frac{2}{3} (\ln 2 \operatorname{ch} Z_1 + Z_1) - \frac{1}{3 \operatorname{ch}^2 Z_1}, \\ \frac{a_5}{\kappa^2 h} &= 3 (\ln 2 \operatorname{ch} Z_1 + Z_1) - \frac{3}{2} (\operatorname{th} Z_1 + 1), \\ \frac{a_8}{\kappa h} &= \frac{1}{2} (\ln 2 \operatorname{ch} Z_1 + Z_1) = -3 \frac{a_{13}}{\kappa h}, \\ -\frac{a_9}{\kappa} &= \operatorname{th} Z_1 + 1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Der Koeffizient  $a_4$  mußte ebenfalls numerisch ermittelt werden. In Abb. 4 sind die sich ergebenden Größen als Funktionen von  $Z_1$  dargestellt.

(Eingegangen am 6. Dezember 1955)

# Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung

Von W. Wunderlich, Wien

Mit 5 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Ausgehend von dem genauen, elliptische Integrale enthaltenden Ausdruck für den Winkel des abgewickelten Mantels eines Kegels 2. Ordnung werden eine Tabelle, zwei Kurventafeln und schließlich eine Näherungsformel entwickelt, welche eine bequeme Auswertung mit Hilfe eines Leiternomogrammes oder eines Sonderrechenschiebers gestattet.

Veranlaßt durch verschiedentliche Anfragen aus Praktikerkreisen, betreffend die Bestimmung des Zentriwinkels, der dem in die Ebene ausgebreiteten Mantel eines schiefen Kreiskegels zukommt, hat sich der Verfasser bemüht, diese nicht so ganz einfache Aufgabe in einer den praktischen Bedürfnissen gerecht werdenden Weise zu erledigen.

Da es sich beim schiefen Kreiskegel bekanntlich um den allgemeinen Kegel 2. Ordnung handelt, so scheint es angezeigt, die Rechnung auf dessen charakteristische Abmessungen, nämlich die Hauptöffnungswinkel  $2\alpha$  und  $2\beta$  zu gründen. Diese sind in jedem Fall elementar aus den Angabestücken des schiefen Kreiskegels zu ermitteln, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll<sup>1</sup>. Auf prinzipielle Schwierigkeiten stößt man erst bei der Bestimmung des in der Abwicklung auftretenden Mantelwinkels  $4\omega$ , der eine ziemlich komplizierte Funktion der Größen  $\alpha$  und  $\beta$  ist. Hauptzweck der vorliegenden Arbeit war es, brauchbare Hilfsmittel zur raschen Auswertung der Funktion  $\omega(\alpha, \beta)$  bereitzustellen.

## I. Genaue Formel für den Mantelwinkel

In einem Normalkoordinatensystem  $x, y, z$ , dessen Achsen mit den Hauptachsen des betrachteten Kegels zusammenfallen, kann dieser stets beschrieben werden durch

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{mit} \quad a = \operatorname{tg} \alpha, \quad b = \operatorname{tg} \beta; \quad (1)$$

hierbei darf ohne Einschränkung  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq \pi/2$  vorausgesetzt werden. Wir schneiden den Kegel mit der Ebene  $z = 1$  ab und stellen die Schnittellipse mittels eines Hilfsparameters  $\varphi$  dar, wobei wir die Koordinaten eines laufenden Punktes zum Ortsvektor

$$\mathbf{r} = (a \sin \varphi, b \cos \varphi, 1) \quad (2)$$

zusammenfassen. Wir betrachten ferner das von zwei benachbarten Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  aufgespannte Mantel-element (Abb. 1) und drücken dessen Fläche  $dF$  nach den Elementen der Vektorrechnung auf zwei Arten aus:

$$2 dF = |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|^2 d\psi; \quad (3)$$

über das Außenprodukt

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = (b \sin \varphi, -a \cos \varphi, -ab) d\varphi \quad (4)$$

gelangen wir so zum Mantelwinkelelement

$$d\psi = \frac{|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|}{r^2} = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + 1} d\varphi. \quad (5)$$

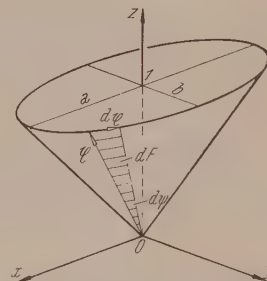


Abb. 1

<sup>1</sup>  $2\alpha$  tritt als Winkel zwischen der kürzesten und der längsten Erzeugenden des schiefen Kreiskegels auf;  $2\beta$  ist der Winkel jener beiden Erzeugenden, die der Symmetralebene des Winkels  $2\alpha$  angehören.

Tabelle 1 (an der Diagonale gespiegelt zu denken). Mantelquadrant  $\omega$  in

$\alpha \backslash \beta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
90°	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00
85°	85°00	85°06	85°20	85°38	85°60	85°85	86°12	86°40	86°70
80°	80°00	80°12	80°41	80°77	81°21	81°71	82°24	82°81	83°40
75°	75°00	75°19	75°62	76°17	76°83	77°58	78°38	79°23	80°11
70°	70°00	70°26	70°83	71°58	72°47	73°46	74°53	75°66	76°84
65°	65°00	65°33	66°04	66°99	68°11	69°35	70°69	72°11	73°59
60°	60°00	60°40	61°27	62°42	63°77	65°27	66°88	68°58	70°35
55°	55°00	55°48	56°51	57°86	59°45	61°21	63°10	65°08	67°15
50°	50°00	50°56	51°76	53°33	55°16	57°19	59°35	61°63	64°00
45°	45°00	45°65	47°03	48°82	50°90	53°21	55°65	58°23	60°90
40°	40°00	40°75	42°32	44°36	46°70	49°28	52°02	54°88	57°85
35°	35°00	35°87	37°65	39°94	42°57	45°43	48°46	51°62	
30°	30°00	31°00	33°03	35°59	38°52	41°67	45°00		
25°	25°00	26°17	28°47	31°34	34°57	38°04			
20°	20°00	21°38	24°01	27°22	30°78				
15°	15°00	16°67	19°69	23°29					
10°	10°00	12°08	15°63						
5°	5°00	7°84							
0°	0°00								

Integration von 0 bis  $2\pi$  würde den gesuchten Mantelwinkel liefern. Es ist jedoch zweckmäßiger, sich auf den Mantelquadranten

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + 1} d\varphi \quad (6)$$

zu beschränken. Der ganze Mantelwinkel hat dann den Wert  $4\omega$ .

Das vorliegende Integral läßt sich nur in drei Grenzfällen elementar auswerten, nämlich für

a)  $\beta = 0$  (abgeplatteter Kegel): Der Kegel schrumpft auf den doppelt überdeckten Winkel  $2\alpha$  in der  $xz$ -Ebene zusammen, und somit ist

$$\omega = \alpha; \quad (6a)$$

b)  $\alpha = \pi/2$  (zerfallender Kegel): Der Kegel artet zu einem den Winkel  $2\beta$  einschließenden Ebenenpaar durch die  $x$ -Achse aus, und es wird

$$\omega = \frac{\pi}{2}; \quad (6b)$$

c)  $\alpha = \beta$  (Drehkegel): Der Kegel besitzt die  $z$ -Achse zur Rotationsachse und man erhält das geläufige Resultat

$$\omega = \frac{\pi}{2} \sin \alpha. \quad (6c)$$

Ansonsten liegt jedoch ein elliptisches Integral vor, das sich in der folgenden Weise auf die Legendreschen Normalformen zurückführen läßt:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+a^2 k^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1+a^2}{a\sqrt{1+b^2}} \Pi(a^2 k^2, k) - \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} K(k) \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2(1+b^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Das auftretende vollständige Integral 1. Gattung  $K$  liegt vertafelt vor, und das



Abhängigkeit von den halben Hauptöffnungswinkeln  $\alpha$  und  $\beta$ 

45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00	90°00
87°00	87°31	87°63	87°97	88°31	88°64	88°98	89°32	89°66	
84°01	84°64	85°28	85°94	86°61	87°28	87°95	88°63		
81°03	81°97	82°94	83°92	84°92	85°92	86°93			
78°06	79°32	80°61	81°92	83°24	84°57				
75°12	76°69	78°29	79°92	81°57					
72°19	74°08	75°99	77°94						
69°29	71°49	73°72							
66°44	68°94								
63°64									

vollständige Integral 3. Gattung II läßt sich bekanntlich ausdrücken durch vollständige und unvollständige Integrale 1. und 2. Gattung<sup>2</sup>. Die so gewonnene Endformel

$$\left. \begin{aligned} \omega &= K(k) \cdot E(k', \alpha) - [K(k) - E(k)] \cdot F(k', \alpha) \\ k' &= \sqrt{1 - k^2} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + b^2}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

mit kann mit Hilfe eines guten Tafelwerkes in jedem Einzelfall ohne weiteres ausgewertet werden<sup>3</sup>.

Die hier wiedergegebene, auf Grund der Formel (8) berechnete Tabelle 1 enthält auf Hundertstelgrade die Werte von  $\omega$  für von 5 zu 5° fortschreitende Werte von  $\alpha$  und  $\beta$ . Sie gestattet nunmehr ohne weitere Hilfsmittel durch bloße Interpolation die Bestimmung des Mantelwinkels  $4\omega$  mit einer für praktische Erfordernisse mehr als ausreichenden Genauigkeit<sup>4</sup>.

## II. Zwei Netztafeln

An Hand des nunmehr verfügbaren Zahlenmaterials lassen sich sofort geeignete graphische Darstellungen entwickeln, die bei geringeren Genauigkeitsansprüchen eine rasche Ablesung der  $\omega$ -Werte gestatten. Die in Abb. 2 wiedergegebenen Kurven-tafeln beruhen im Grunde auf einfachen Projektionen jenes räumlichen Schaubildes der Funktion  $\omega(\alpha, \beta)$ , das bei Deutung der Veränderlichen  $\alpha, \beta, \omega$  als kartesischen Koordinaten entsteht. Die so erklärte Diagrammfläche  $\Phi$  erstreckt sich nach Art

<sup>2</sup> Vgl. etwa W. Gröbner-N. Hofreiter: Integraltafel II, S. 42, Formel 13a. Wien: Springer-Verlag, 1950.

<sup>3</sup> Etwa A. M. Legendre-F. Emde: Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Stuttgart: Wittwer, 1931. Oder K. Hayashi: Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin: Springer-Verlag, 1930.

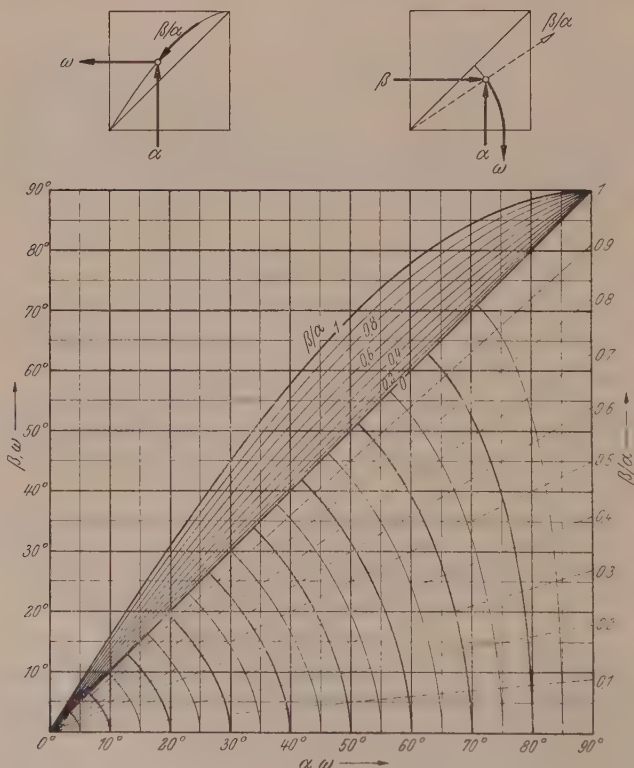
<sup>4</sup> Vergleich der berechneten Werte mit insgesamt 30 vorher auf graphischem Wege ermittelten Werten ergab durchwegs Übereinstimmung auf etwa 0°1'. Dies zeigt — entgegen manchmal geäußerten Ansichten —, daß die von der darstellenden Geometrie gelehrt konstruktiven Abwicklungsmethoden bei sorgfältiger Zeichnung durchaus verlässliche Resultate liefern. Hingegen erwies sich bei der numerischen Auswertung — für deren Durchführung ich namentlich Herrn Ass. W. Fuhs zu Dank verpflichtet bin —, daß leider keines der beiden oben genannten Tafelwerke vollkommen fehlerfrei ist.

Tabelle 2 (an der Diagonale gespiegelt zu denken). Differenz

$\alpha \backslash \beta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
90°	00	00	00	00	00	00	00	00	00
85°	00	03	03	03	01	—01	—04	—06	—08
80°	00	06	06	06	03	—02	—05	—10	—13
75°	00	08	09	08	05	—02	—07	—12	—16
70°	00	10	13	11	05	—01	—08	—14	—18
65°	00	13	16	14	07	00	—08	—15	—19
60°	00	15	19	16	08	00	—08	—14	—18
55°	00	17	21	18	09	00	—09	—14	—16
50°	00	19	23	18	09	—01	—09	—13	—14
45°	00	21	24	18	09	—02	—09	—12	—10
40°	00	22	24	16	07	—03	—08	—07	00
35°	00	22	23	14	02	—05	—06	00	
30°	00	22	19	09	—01	—05	00		
25°	00	20	14	04	—03	00			
20°	00	17	07	—01	00				
15°	00	11	01	00					
10°	00	05	00						
5°	00	00							
0°	00								

eines Kegels vom Nullpunkt zur Randkante  $\alpha = \pi/2$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi/2$ ,  $\omega = \pi/2$ , wobei jedoch die in den Ebenen  $\beta/\alpha = \text{konst.}$  verlaufenden „Meridianprofile“ im allgemeinen nicht geradlinig sind. Eine Ausnahme bildet lediglich das Randprofil  $\beta = 0$ , das gemäß (6a) gerade ist, während das zweite Randprofil  $\beta/\alpha = 1$  zufolge (6c) vom

Teilbogen einer Sinuslinie gebildet wird; die dazwischen liegenden Meridianprofile sind gleichfalls monoton ansteigende Zwischenformen.

Abb. 2. Doppeltafel zur Ablesung von  $\omega$ 

Die in Abb. 2 unterhalb der Diagonale befindliche Diagrammhälfte stellt gewissermaßen den Schichtenplan von  $\Phi$  im Grundriß dar. Diese Netztafel besteht aus der im  $(\alpha, \beta)$ -Raster eingetragenen Kurvenschar  $\omega = \text{konst.}$  und erlaubt nach der in der rechten Nebenfigur angedeuteten Vorschrift zu jedem Wertepaar  $\alpha, \beta$  unmittelbar den entsprechenden  $\omega$ -Wert abzulesen<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Die auf der  $\alpha$ -Achse liegenden Scheitel der Diagrammkurven  $\omega = \text{konst.}$  haben verschwindenden Krümmungsradius; bei den Scheiteln auf der Diagonale findet man (mittels Potenzreihenentwicklung) für den Krümmungsradius den Wert  $\varrho = 2 \sqrt{2} \sin 2\alpha / (3 - \cos 2\alpha) = 4 \sqrt{2} \omega \sqrt{\pi^2 - 4\omega^2} / (\pi^2 + 4\omega^2)$ .

## Näherungswert — Sollwert des Mantelquadranten in Hundertstelgraden

45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
—09	—09	—10	—11	—11	—09	—07	—04	00	
—15	—17	—17	—17	—15	—12	—06	00		
—19	—20	—21	—19	—15	—09	00			
—21	—22	—21	—17	—10	00				
—22	—21	—18	—11	00					
—20	—18	—11	00						
—15	—11	00							
—09	00								
00									

Die Diagrammhälfte oberhalb der Diagonale ist als Aufriß der vorhin erwähnten Meridianprofilschar von  $\Phi$  aufzufassen. Diese Netztafel besteht aus der im  $(\alpha, \omega)$ -Raster eingetragenen Kurvenschar  $\beta/\alpha = \text{konst.}$  Die Benützung dieses Diagramms verlangt wohl zunächst die Bestimmung von  $\beta/\alpha$  — was mit dem Rechenschieber oder nomographisch mittels der gestrichelten Büschelskala in der anderen Tafelhälfte geschehen kann —, dafür ist aber (gemäß der linken Nebenfigur)  $\omega$  in einer linearen Teilung abzulesen<sup>6</sup>.

Bei dieser Gelegenheit sei noch auf eine Netztafel von E. J. Nyström hingewiesen, die direkt auf die Verwendung für schiefe Kreiskegel zugeschnitten ist, allerdings nicht den ganzen Wertebereich erfaßt<sup>7</sup>.

### III. Eine Näherungsformel

Betrachtung der Kurvenschar  $\beta/\alpha = \text{konst.}$  in der zweiten Netztafel erweckt den Eindruck, daß die zwischen den Grenzlinien  $\beta/\alpha = 0$  und 1 liegenden Ordinatenabschnitte  $(\pi/2) \sin \alpha - \lambda$  sämtlich in gleicher Weise, das heißt geometrisch ähnlich unterteilt werden. Genau kann dies wegen der höheren Transzendenz der Zwischenkurven natürlich nicht der Fall sein, doch bietet sich hier immerhin ein Ansatz für eine brauchbare und sehr bequeme Näherung.

Zur Prüfung des Sachverhaltes wird man für verschiedene feste Werte von  $\alpha$  die Abhängigkeit des Teilverhältnisses

$$\frac{\omega - \alpha}{(\pi/2) \sin \alpha - \alpha} = \lambda \quad (9)$$

von  $\beta/\alpha$  graphisch darstellen. Es zeigt sich, daß die so erhaltenen Diagrammkurven tatsächlich fast identisch ausfallen. Als nächstes wird man trachten, diese Diagrammkurven durch eine gemeinsame, analytisch möglichst einfach beschreibbare Linie

<sup>6</sup> Mit Rücksicht auf die verkleinerte Wiedergabe wurde bei allen graphischen Tafeln davon abgesehen, die Unterteilung weiter zu verfeinern.

<sup>7</sup> E. J. Nyström: Abwicklung von Kegelflächen zweiter Ordnung. Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 12 (1944).



anzunähern. Die nebenstehende Darstellung im doppelt-logarithmischen Raster läßt erkennen, daß die als Prototyp verwendete Kurve  $\alpha = 50^\circ$  mit guter Näherung durch das Potenzgesetz

$$\lambda \approx \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1.4} \quad (10)$$

wiedergegeben wird. Über (9) führt dieser Ersatz zur Näherungsformel

$$\omega \approx \alpha + \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \alpha\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1.4}, \quad (11)$$

welche natürlich nur unter der Voraussetzung  $\alpha \geq \beta$  verwendet werden darf.

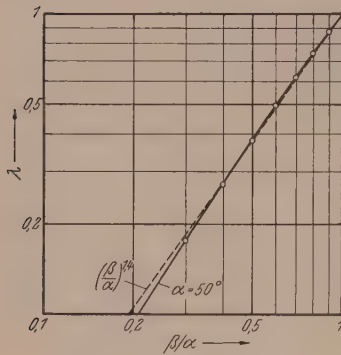


Abb. 3

Ein Urteil über die Güte der Approximationsformel (die in den drei Grenzfällen  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$  und  $\alpha = \beta$  den genauen Wert liefert) erlaubt die vorstehende Tabelle 2, die in Hundertstelgraden die Differenzen zwischen dem Näherungswert gemäß Formel (11) und dem Sollwert gemäß Tabelle 1 aufzeigt<sup>8</sup>. Wie man sieht, übersteigt der Fehlerbetrag nirgends  $1/4$  Grad, was für die meisten Zwecke als tragbar anzusehen sein dürfte. Es ist klar, daß sich der Fehler noch herunterdrücken läßt, wenn man

sich auf einen entsprechend kleinen Variabilitätsbereich beschränkt, und dies ist fraglos in jedem bestimmten Anwendungsgebiet von vornherein möglich.

#### IV. Eine Leitertafel

Schreiben wir die Näherungsformel (11) unter gleichzeitigem Übergang vom Bogen- zum Gradmaß in der Gestalt

$$\omega \approx \alpha + p \cdot \beta^{1.4} \quad \text{mit} \quad p = \frac{90 \sin \alpha - \alpha}{\alpha^{1.4}}, \quad (12)$$

so stellt sie sich als lineare Beziehung zwischen  $\omega$  und  $\beta^{1.4}$  mit nur von  $\alpha$  abhängigen Koeffizienten dar. Eine solche Abhängigkeit ist bekanntlich in Form einer Leitertafel nomographierbar, welche eine krumme Skala für  $\alpha$  und zwei gerade Skalen für  $\beta$  und  $\omega$  aufweist.

Abb. 4 zeigt eine solche für den ganzen Variabilitätsbereich angelegte Leitertafel, deren Skalen in einem geeigneten schiefwinkligen Koordinatensystem  $\xi, \eta$  durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \dots \xi &= \frac{90}{1 + 6p}, & \eta &= -\frac{\alpha}{1 + 6p}; \\ \beta \dots \xi &= 0, & \eta &= \frac{1}{6} \beta^{1.4}; \\ \omega \dots \xi &= 90, & \eta &= -\omega. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingung dafür, daß drei Skalenpunkte mit den obigen Koordinaten auf einer (Ablese-) Geraden liegen, der Gl. (12) äquivalent ist. Bei der Benützung des Nomogramms ist wieder darauf zu achten, daß die Bedingung  $\alpha \geq \beta$  eingehalten wird.

<sup>8</sup> Negatives Vorzeichen bedeutet also, daß die Näherungsformel einen zu kleinen Wert liefert.

Die Genauigkeit des Nomogramms läßt sich beträchtlich steigern, wenn man den Anwendungsbereich einschränkt und die Skalengleichungen (13) entsprechend modifiziert.

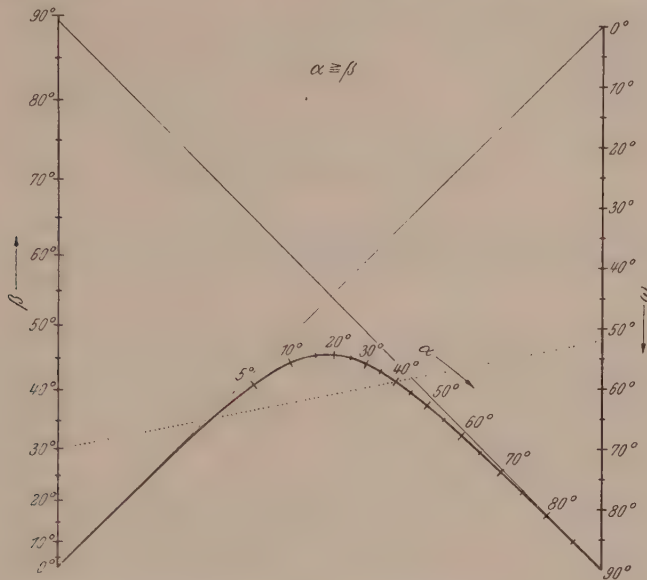


Abb. 4. Approximative Leitertafel für  $\omega$ . Ablesebeispiel:  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ;  $\omega \approx 52^\circ$

### V. Ein Sonderrechenstab

Schreiben wir die Näherungsformel (11) in der Gestalt

$$\omega - \alpha \approx \frac{\beta^{1.4}}{q} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\alpha^{1.4}}{90 \sin \alpha - \alpha} \quad (14)$$

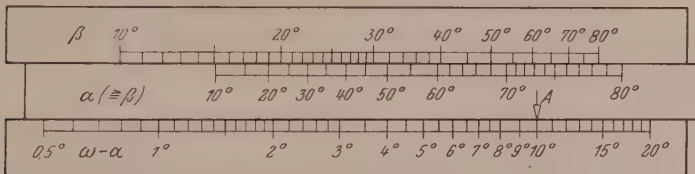


Abb. 5. Sonderrechenstab für die Differenz  $\omega - \alpha$ . Ablesebeispiel:  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 19^\circ$ ;  
 $\omega - \alpha \approx 10^\circ$ ,  $\omega \approx 30^\circ$

dann liegt eine reine Produktrelation vor, die sich nach Logarithmierung durch einen entsprechenden Rechenschieber darstellen läßt. Abb. 5 zeigt eine Ausführungsform, bei der die Skalen für  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma = \omega - \alpha$  durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha \dots x &= \lg q = 1.4 \cdot \lg \alpha - \lg (90 \sin \alpha - \alpha), \\ \beta \dots y &= 1.4 \cdot \lg \beta, \\ \omega - \alpha \dots z &= \lg \gamma = \lg (\omega - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

beschrieben werden. Der Rechenstab verwirklicht die zu (12) äquivalente Beziehung

$$z = y - x. \quad (16)$$

Zur Berechnung von  $\omega$  stellt man die  $\alpha$ -Marke der verschiebbaren Zunge unter die  $\beta$ -Marke auf der oberen Hälfte des Grundkörpers, worauf sich unterhalb der auf

der Zunge befindlichen Ablesemarke  $A$  die Differenz  $\omega - \alpha = \gamma$  ablesen läßt; anschließend ergibt sich dann mittels Kopfrechnung  $\alpha + \gamma = \omega$ . Auch hier ist unbedingt  $\alpha \geq \beta$  einzuhalten<sup>9</sup>.

Einschränkung des Anwendungsbereiches würde wieder eine Steigerung der Genauigkeit ermöglichen.

(Eingegangen am 24. Januar 1956)

## Buchbesprechungen

**Darstellungen von Gruppen.** Mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. Von *H. Boerner*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band LXXIV.) Mit 15 Textabb., XI, 287 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 33.—, geb. DM 36.60.

Die Schrödinger-Gleichung der Wellenmechanik gibt über die möglichen Energiezustände eines Atoms oder Moleküls Aufschluß und gestattet damit, die im Spektrum auftretenden Linien zu ordnen und zu klassifizieren. Leider ist diese wichtige Aufgabe in den seltensten Fällen durch direkte Integration der Schrödinger-Gleichung zu lösen, da die praktischen Schwierigkeiten einer solchen Integration meist unüberwindlich sind.

Es ist daher von großer Bedeutung, daß man alle wesentlichen qualitativen Aufschlüsse über die Energieniveaus fast ohne numerische Rechnung aus den Symmetrien des Atoms bzw. Moleküls gewinnen kann. Den Schlüssel dazu liefert das Studium der Symmetriegruppen und der linearen Transformationen des sogenannten Phasenraumes der Darstellungen.

In deutscher Sprache liegen über dieses Gebiet ausgezeichnete und bekannte Bücher vor (so von *van der Waerden* „Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik“ im Springer-Verlag), die doch — abgesehen von ihrem zwanzig und mehr Jahre zurückliegenden Erscheinungsdatum — vom Standpunkt des Mathematikers stellenweise unbefriedigend sind: Sie sind für Physiker geschrieben und bringen Sätze über die Theorie der Darstellungen meist nur, wenn sie unmittelbare physikalische Anwendung finden. Darunter leidet der Einblick des Lesers in die Zusammenhänge der Theorie und er lernt nicht ihre Probleme kennen, da man diese mit Rücksicht auf Leser, die nur an den Anwendungen interessiert sind, fernhalten muß.

Aus allen geschilderten Gründen war das Erscheinen eines Buches über die Darstellungen von Gruppen zu wünschen, das von einem Mathematiker für Mathematiker geschrieben wurde, aber deshalb nicht an den Bedürfnissen der Physiker vorbeizugehen brauchte — alles Eigenschaften, die auf das vorliegende Buch zutreffen. Es ist klar und übersichtlich abgefaßt, der Verfasser entwickelt die Beweise lückenlos und stellt überdies sämtliche benötigten Vorkenntnisse in den Anfangskapiteln knapp aber vollständig bereit. Der Text wird durch Beispiele erläutert, die für die Anwendungen von Bedeutung sind.

Im einzelnen sind die Einleitungen zu den Kapiteln zu begrüßen, die den Inhalt des Kapitels mit einigen Worten andeuten, Wesentliches von Unwesentlichem unterscheiden und Zusammenhänge aufzeigen. Persönliche Abneigung besitzt der Besprecher gegen die — von den Physikern benützte — Multiplikation der Gruppen von rechts nach links, die infolge der Indizes und Exponenten nicht flüssig zu verstehen ist, solange wir von links nach rechts zu lesen gewohnt sind.

Zusammenfassend kann das Buch Mathematikern ohne Vorbehalt empfohlen werden. Physiker können es dann mit Gewinn lesen, wenn sie über die möglichen Anwendungen schon informiert sind, denn das Werk vermeidet bewußt, aus den mathematischen Sätzen irgendwelche Konsequenzen für die reale Außenwelt zu behaupten. Da über diesen Zusammenhang zwischen Darstellungstheorie und Anwendungen aber — wie eingangs erwähnt — ausgezeichnete Bücher vorhanden sind, scheint es dem Besprecher eher ein Vorteil zu sein, daß der Verfasser nur die mathematische Theorie behandelt, diese aber vollständig und systematisch.

*W. Knödel*, Wien

**Praktische Algebra.** Von *H. Dörrie*. Mit 8 Textabb., VIII, 259 S. München: R. Oldenbourg. 1955. DM 24.—.

Das Buch verfolgt das Ziel, den Leser in die Praxis der Auflösung algebraischer Gleichungen einzuführen. Es gliedert sich demgemäß in die Abschnitte: Fundamentalsatz der Algebra,

<sup>9</sup> Die durch (14) gegebene Abhängigkeit zwischen den Größen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma = \omega - \alpha$  könnte selbstverständlich auch durch einfache Nomogramme dargestellt werden, insbesondere durch Leitertafeln mit drei geraden Skalen.



Algebraische Division, Symmetrische Funktionen, Spezielle Gleichungen, Wurzelschranken, Wurzelzählung, Gleichungen mit nur reellen Wurzeln, Wurzelberechnung. Die sehr ausführliche Darstellung des Gegenstandes wird durch die zahlreichen geschichtlichen Hinweise überaus belebt. Das Buch gewinnt dadurch besonders an Wert, daß es im letzten Drittel eine Sammlung von mehr als 100 vollständig durchgerechneten Aufgaben enthält, die zum Teil zur Illustration vieler reizvoller, aber heute nur mehr wenig beachteter Lehrsätze dienen. Es ist für die Eigenart des überaus produktiven Autors kennzeichnend, daß er der Versuchung nach Einführung neuer Bezeichnungen nicht widerstehen kann, was nicht immer von Vorteil ist. Die Bezeichnung der unimodularen Zahlen  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  mit  $1^*$  kann keinesfalls toleriert werden; ein eigenes Zeichen für die negativ reelle Einheit ist zweifellos überflüssig. Trotzdem wird das Buch im Hinblick auf seine sonstigen Vorteile sehr viele Leser befriedigen.

*R. Inzinger, Wien*

**Müller-Graf's Kurzes Lehr- und Handbuch der Technologie der Brennstoffe.** Bearbeitet von *E. G. Graf*. Vierte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 179 Textabb. und 130 Tab., XII, 736 S. Wien: F. Deuticke. 1955. S 375.—.

Schon bald nach dem Erscheinen der im Jahre 1939 fertiggestellten ersten Auflage erfreute sich diese bei den in der Praxis stehenden Ingenieuren und Chemikern großer Beliebtheit. Nachdem bald darauf leider Herr Prof. W. J. Müller verschied, mußte Herr Dozent E. Graf die notwendig gewordenen Neuauflagen allein herausbringen und er hat diese mühevollen Arbeit trotz seiner beruflichen Belastung in bester Weise bewältigt.

Die vorliegende vierte Auflage ist neu bearbeitet und den Bedürfnissen der Praxis entsprechend soweit ergänzt, daß die Fortschritte der Entwicklung in den letzten Jahren weitgehendst Berücksichtigung finden konnten. Dabei kamen dem Verfasser seine reichen Erfahrungen zugute, die er in leitenden Stellungen in Europa und als Konsulent und Mitarbeiter des U. S. Bureau of Mines, Pittsburgh, sammeln konnte, nicht zuletzt aber ein intensiver Erfahrungsaustausch mit international anerkannten Fachleuten. Um den zahlreichen Anregungen aus Fach- und Leserkreisen ohne allzu große Erweiterung des Umfanges Rechnung tragen zu können, mußten einige Kapitel gekürzt werden, was aber ohne Störung der Übersichtlichkeit möglich war.

Auch die neueste Auflage wird sich in den Kreisen der Ingenieure und Chemiker wieder großer Beliebtheit erfreuen und ist auch den Studierenden bestens zu empfehlen.

*F. Magyar, Wien*

**Die Oberstufe des Tauernkraftwerkes Glockner-Kaprun.** Festschrift. Herausgegeben von der Tauernkraftwerke-Aktiengesellschaft. Mit zahlreichen Textabb., 472 S. Zell am See: Tauernkraftwerke A. G. 1955.

Die anlässlich der Fertigstellung der Oberstufe erschienene Festschrift enthält 61 Arbeiten, welche die vielen theoretischen und praktischen Probleme erkennen lassen, die von den am Ausbau des Kraftwerkes beteiligten Firmen und technischen Beratern zu bewältigen waren. Zu den praktischen Problemen müssen wohl auch die kommerziellen und organisatorischen Fragen gerechnet werden, für die eine Lösung gefunden werden mußte. Die Festschrift schließt mit einem chronologisch geordneten Literaturverzeichnis, welches als nicht vollständig bezeichnet wird, und mit einer Zusammenstellung der beteiligten Firmen. Die wissenschaftlichen und technischen Mitarbeiter, die als Experten in ihrem Fachgebiet beim Entwurf und beim Bau der Oberstufe Kaprun tätig waren, werden eingangs genannt, nach der vom zuständigen Ressortminister, Herrn Dipl.-Ing. Waldbrunner, und dem Vorstand und Aufsichtsrat der Tauernkraftwerke A. G. verfaßten Einführung.

Die sehr gut zusammengestellte Festschrift gibt einen Überblick über die gewaltige Arbeit, die trotz der Ungunst der Verhältnisse in den Nachkriegsjahren geleistet wurde. Die österreichische Wissenschaft und Technik darf mit Stolz auf ihren großen Erfolg hinweisen.

*F. Magyar, Wien*

**Aeroelasticity.** Von *R. L. Bisplinghoff, H. Ashley* und *R. L. Halfman*. Mit Textabb., IX, 860 S. Cambridge/Mass.: Addison-Wesley Publ. Comp., Inc. 1955. \$ 14.50.

Das von drei Professoren des MIT geschriebene Werk soll nach der Absicht der Verfasser ein Unterrichtsbuch für fortgeschrittene Studenten des Maschinenbaus und ein Nachschlagewerk für Ingenieure der Praxis sein. Aber nicht nur die praktischen Gesichtspunkte, die sich bei der Aeroelastizität ergeben, sollten berücksichtigt werden, sondern auch die aerodynamischen und konstruktiven Hilfsmittel. So ergaben sich von selbst zwei Teile des Werkes, der erste handelt von den Hilfsmitteln, der zweite von der Anwendung dieser auf aeroelastische Erscheinungen.

Es gibt im Flugzeugbau einen Kreis von Problemen, die für den Ingenieur sehr wichtig sind und für die man den Ausdruck Aeroelastizität anwendet. Schon aus der Bezeichnung kann man



schließen, daß Aeroelastizität ein Wissensgebiet ist, in dem man die Wechselwirkung zwischen aerodynamischen und elastischen Kräften studiert und die Bedeutung dieser Wechselwirkung für den Flugzeugbau besonders beachtet. Aeroelastische Erscheinungen treten deshalb auf, weil man es bei den Flugzeugen nicht mit vollkommen starren Körpern zu tun hat.

Im ersten Kapitel besprechen die Verfasser allgemein die Bedeutung der Aeroelastizität unter den aeronautischen Wissenschaften. Die drei folgenden Kapitel enthalten die Besprechung der elastischen Erscheinungen und die nächsten drei bringen die Aerodynamik der inkompressiblen und kompressiblen Flüssigkeiten und insbesondere Flügel und Körper in instationärer Strömung. Mit dem nächsten Kapitel gehen die Verfasser auf die aeroelastischen Erscheinungen über. Im letzten Kapitel werden die experimentellen Methoden behandelt, die nach der Ansicht der Verfasser von Bedeutung sind, weil es nicht immer möglich ist, die analytische Methode wegen der Länge der Zeit, die man unter Umständen braucht, anzuwenden.

Das Werk ist mit Absicht so geschrieben, daß man es sowohl als Einführung in die Aeroelastizität wie auch für fortgeschrittene Studien verwenden kann. Reicher Inhalt, klare textliche Formulierungen, exakte Berechnungen, Beispiele mit Lösungen und eine sehr gute Gliederung des Gesamtstoffes machen das Werk zu einem ausgezeichneten Fachbuch, dessen Druck und Ausstattung sehr schön sind.

*R. Bruniak, Wien*



*Soeben erschienen:*

**Gröber-Erk, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung.** Dritte, völlig neu bearbeitete Auflage von Dr.-Ing. Ulrich Grigull, Farbenfabriken Bayer A. G., Leverkusen. Mit 190 Abbildungen. VIII, 428 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 37.50

---

**Regelungstechnik.** Kurze Einführung am Beispiel der Drehzahlregelung von Wasserturbinen. Von Dr.-Ing. Georg Hutarew, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 198 Abbildungen. XI, 177 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 18.—; Ganzleinen DM 21.—

---

**Konstruktionen aus dem Dampfturbinenbau.** Sammlung von Konstruktionszeichnungen für Technische Hochschulen, höhere Maschinenbauschulen, Ingenieure und Techniker. Von Dr.-Ing. A. Loschge, o. Professor, Technische Hochschule München. Unter Mitwirkung von Dr.-Ing. Heinz Blenke, BASF, Konstr.-Abt., Ludwigshafen/Rh., und Dipl.-Ing. Karl Rüger, Dozent am O. v. Miller-Polytechnikum München. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 199 Abbildungen. 78 Seiten. 4°. 1955. Steif geheftet DM 10.50

---

**Die Steuerung des Gaswechsels in schnelllaufenden Verbrennungsmotoren.** Konstruktion und Berechnung der Steuerelemente. Von Dipl.-Ing. Wolf-Dieter Bensinger, Oberingenieur der Daimler-Benz A.-G., Stuttgart-Untertürkheim. Mit 106 Abbildungen. V, 93 Seiten. 8°. 1955. (Konstruktionsbücher, 16. Band.) DM 12.—

---

**Die Kreispumpen für Flüssigkeiten und Gase.** Wasserpumpen, Ventilatoren, Turbo-gebläse, Turbokompressoren. Von Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. Carl Pfeleiderer, emer. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 386 Abbildungen. XI, 589 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 58.50

---

**Teilen und Spiralfräsen.** Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen des Universalteilkopfes. Von Ing. Otto Lichtwitz, London. Mit 25 Abbildungen und 33 Tabellen. V, 89 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 9.—

---

**Theoretische Bodenmechanik.** Von Dr.-Ing. Karl Terzaghi, o. Professor an der Harvard-University Cambridge, Mass., USA. Übersetzt und bearbeitet nach der fünften amerikanischen Auflage von Dr.-Ing. Richard Jelinek, Technische Hochschule, München. Mit 153 Abbildungen. XVIII, 505 Seiten. Gr.-8°. 1954. Ganzleinen DM 48.—

---

**Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe.** Von Dr.-Ing. Franz Kollmann, o. ö. Professor der Universität München, Direktor des Instituts für Holzforschung und Holztechnik München. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage.

---

*Soeben erschien:*

Zweiter Band: **Holzschutz, Oberflächenbehandlung, Trocknung und Dämpfen, Veredelung, Holzwerkstoffe, spanabhebende und spanlose Holzbearbeitung, Holzverbindungen.** Mit 1194 Abbildungen im Text und 6 Tafeln. XVIII, 1199 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 136.—

---

**Atomkraft.** Eine Studie über die technischen und wirtschaftlichen Aussichten von Atomkraftwerken. Für Ingenieure, Energiewirtschaftler und Volkswirte. Von Dr.-Ing., Dr.-Ing. E. h. Friedrich Münzinger, Berlin. Mit 61 Abbildungen und 19 Zahlentafeln. VI, 94 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 10.50

---



*Soeben erschienen:*

**Die Maßsysteme in Physik und Technik.** Kritische Untersuchung der Grundlagen zur Aufstellung einwandfreier Maßsysteme und Vergleich der bestehenden Systeme in Physik und Technik. Von Dipl.-Ing., Dr. techn. **Günther Oberdorfer**, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Graz. VI, 140 Seiten. Gr.-8°. 1956. Steif geheftet S 96.—, DM 16.—, sfr. 16.30, \$ 3.80

Die Maßsystemfrage gewinnt immer mehr an Bedeutung, seitdem die nationalen und internationalen Verbände eine weitgehende Vereinheitlichung und Gleichschaltung versuchen. Viele der aufgeworfenen Fragen sind dabei noch unklar, bzw. von den Beteiligten in ihren physikalischen Grundlagen nicht erkannt oder durch historische Entwicklung in falsche Bahnen gekommen. Das vorliegende Buch zeigt die natürlichen und determinierten Bedingungen zur Bildung richtiger und brauchbarer Maßsysteme auf und wendet sich dabei an alle Kreise der praktischen und theoretischen Technik und Physik. Es wird versucht, das Problem aller Spekulationen zu entkleiden und die klaren physikalischen Grundlagen und Notwendigkeiten herauszustellen, die allein zu einer einfachen, dauernden und befriedigenden Lösung des Fragenkomplexes führen können. Diese kann nicht über vermeintliche Zweckmäßigkeiten, sondern nur durch die physikalisch aufgezwungenen Erfahrungen gefunden werden.

**Ergebnisse und Probleme der quartären Entwicklungsgeschichte am östlichen Alpenraum außerhalb der Vereisungsgebiete.** Von **Arthur Winkler von Hermaden**. Mit 1 Kartentafel, 1 Lichtbildtafel, 1 Profiltafel, 26 Abbildungen im Text und 1 Tabellenbeilage. VIII, 180 Seiten. 4°. 1955. (Denkschriften der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 110. Band. 1. Abhandlung.)

S 274.70, Richtpreise DM 45.80, sfr. 46.85, \$ 10.90

**Blätter für Technikgeschichte.** Herausgegeben vom Technischen Museum für Industrie und Gewerbe in Wien, Forschungsinstitut für Technikgeschichte. Schriftleitung: Dr. phil. **Josef Nagler**, Wien.

Siebzehntes Heft: Mit 40 Abbildungen. V, 157 Seiten. Gr.-8°. 1955.

S 42.—, DM 7.—, sfr. 7.10, \$ 1.65

Inhaltsverzeichnis: **Baxa, Jakob**, Die Leipnik Lundenburger Zuckerfabriken A.-G. — **Niederhuemer, Rolf**, Die Entwicklung der Zuckererzeugung in Österreich. — **Kolbe, Ernst**, Österreichs Beitrag zur Herstellung von Radiumverbindungen im großen durch das Ehepaar Curie. — **Cuscolea, Otwin**, Entwicklung des Blasstahls. — **Benedikt, Heinrich**, Werfner Eisen. — **Quiring, Heinrich**, Johann von Scharfenberg und das Gold-Arsen-Problem. — **Kirnbauer, Franz**, Georg Agricola. Zur Wiederkehr seines 400. Todestages. — **Neweklowsky, Ernst**, Aus der Frühzeit der Donau-Dampfschiffahrts-Gesellschaft. — **Mitteilungen und Berichte**. Denkmalsenthöhung für die Erbauer der Mariazellerbahn. Kaplanstiftung. Nachruf für Hofrat **Holey**, Gen.-Dir. Dr. **Fattinger**. Technikgeschichtliche Bücherschau. Ankündigung über die Herausgabe des Kataloges des Technischen Museums. Gedenktage der österreichischen Technikgeschichte.

**Funktionen und Risiken des Warenhandels.** Von Dr. Dr. e. h. **Karl Oberparleiter**, o. ö. Professor der Hochschule für Welthandel in Wien. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 11 Textabbildungen. VI, 236 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, sfr. 22.60, \$ 5.25

**Vom heterogenen Familieneinkommen zum Familienlohn.** Von Diplom-Volkswirt **Doris Dammer**. Mit einem Geleitwort von DDr. **Hans Bayer**, o. ö. Professor an der Universität Innsbruck, Vorstand des wirtschaftswissenschaftlichen Institutes. VIII, 179 Seiten. Gr.-8°. 1955.

S 60.—, DM 10.—, sfr. 10.30, \$ 2.40

**Internationale Wasserwirtschaft und internationales Recht.** Von **Edmund Hartig**, Sektionschef im Bundesministerium für Land- und Forstwirtschaft, Wien. 103 Seiten. 8°. 1955. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes, Heft 28/29.)

Steif geheftet S 42.—, DM 7.—, sfr. 7.10, \$ 1.65

**Wasserkraft- und Elektrizitätswirtschaft in der Zweiten Republik.** Von Oberbaurat Direktor Dipl. Ing. Dr. techn. **Oskar Vas**, Wien. Mit 39 Tafelbildern, 9 Textabbildungen und 9 Tabellen. 48 Seiten. 8°. 1956. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes, Heft 30.)

Steif geheftet S 36.—, DM 6.—, sfr. 6.—, \$ 1.40

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria